TEOREMA:

"*El conjunto de números impares comprendido entre los valores $N(N-2)$ y N^2, siendo N cualquier número impar mayor que 1, contiene al menos dos números primos.* "

El enunciado del teorema se refiere a la expresión

$$N(N-2)<Q<N^2 \qquad (1)$$

donde:

$$Q=\{N(N-2)+2,\ N(N-2)+4,\ N(N-2)+6,\dots\dots\dots N^2-4,\ N^2-2\}$$

N=número impar mayor que 1

q=elemento perteneciente a Q

nq=número de elementos de q; $(nq=N-1)$

<u>1.-Características de los elementos de Q</u>

-Entre los divisores de los impares no primos comprendidos entre $N(N-2)$ y N^2 se encuentran uno o más elementos del conjunto A

$$A=\{3, 5, 7 \dots\dots\dots(nq-3), (nq-1)\}$$

na=número de elementos de A

$$na=\frac{nq-2}{2}$$

de tal forma que si:

$N=3$; $nq=2$; $na=0$; $A=\{\ \}$; no existen impares no primos en Q

$N=5$; $nq=4$; $na=1$; $A=\{3\}$; los impares no primos de Q son múltiplos de 3

$N=7$; $nq=6$; $na=2$; $A=\{3,5\}$; los impares no primos de Q son múltiplos de 3 y múltiplos de 5

……………………………………………………………………………………..

N=N; nq=N−1; na=$\frac{N-3}{2}$; A={3,5,……….nq−1}; los impares no primos de Q son múltiplos de 3,5 7…………..N-2

-Cada elemento de A es divisor de uno ó más impares no primos comprendidos entre los límites N(N—2) y N^2

-Como los elementos de Q constituyen una sucesión de impares consecutivos, se cumple la regla de separación de impares no primos múltiplos de **a.** (**a**=elemento perteneciente a A)

“Dos impares no primos múltiplos de **a** están separados **a—1** lugares”

-Demostración:

Afirmar que el mínimo de primos contenidos en Q es **2**, es equivalente a afirmar que en Q el máximo de impares no primos es **nq-2**, ya que:

nq-2 +2=nq

Demostraremos que cualquier conjunto **R** de impares consecutivos con un numero par de elementos **nr,** donde los impares no primos son múltiplos de al menos un elemento de **A**

A={3,5,7,……… (nr—3), (nr—1)}

contiene al menos **dos** números primos.

Bastará con demostrar que el máximo de impares no primos en **R** es

nr-2 para cualquier valor de **nr**.

Se trata de colocar el máximo número de impares no primos en un número par de lugares, con la condición de que los impares no primos sean múltiplos de al menos un elemento de **A** y se cumpla la regla de separación: Si dos impares no primos son múltiplos de **a**, estarán separados por **a-1** lugares

Dando valores a nr:

- **nr=2**

El número de lugares de R a ocupar por impares consecutivos es dos

$$R=\{\bullet\ \bullet\}$$

Si nr=2, el número de elementos de A es:

$$\mathbf{na}=\frac{\mathbf{nr}-2}{2}=\frac{2-2}{2}=0$$

$$A=\{\ \}$$

Lo anterior supone que no existe ningún elemento del conjunto **A** como divisor de un impar, y por tanto no existen impares no primos en R, con lo que los dos lugares estarán ocupados por números primos.

Numero de lugares en R=2
[1 2]

1 2 =**Lugares ocupados por números primos**

- **nr=4**

El número de lugares en R a ocupar por impares consecutivos es cuatro

$$R=\{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\}$$

Si nr=4, el número de elementos de A es:

$$\mathbf{na}=\frac{nr-2}{2}=\frac{4-2}{2}=1$$

$$A=\{3\}$$

En consecuencia, los impares no primos en R serán múltiplos de 3

El problema se reduce a ocupar los 4 lugares disponibles en R por el máximo de impares múltiplos de 3.

Numero de lugares en R=4
[1 2 3 4]

La máxima ocupación se consigue cuando los múltiplos de 3 ocupan los lugares 1 y 4, y quedan libres los lugares 2 y 3.

[**1** 2 3 **4**]

1 y 4 **=lugares ocupados por múltiplos de 3**

• • **=Lugares ocupados por números primos**

El máximo número de lugares ocupados es 2. (**nr—2**=2)

Con cualquier otra combinación, el número de lugares en R ocupado por impares es menor que 2

Así, si uno de los múltiplos de 3 ocupa el lugar 2 ó el lugar 3, solo se ocupa en R un lugar en vez de dos

[1 **2** 3 4] **5** 6

2 y 5 **=lugares ocupados por múltiplos de 3**

[1 2 **3** 4] 5 **6**

3 y 6 **=lugares ocupados por múltiplos de 3**

Como resumen: *Si se dispone de 4 lugares (nr=4) a ocupar por impares consecutivos, con la condición de que los impares no primos sean múltiplos de 3, el máximo de impares no primos posible es nr—2*

(4—2=2)

- **nr=6:**

El número de lugares en R a ocupar por impares consecutivos es seis

R={ • • • • • • }

Si nr=6, el número de elementos de A es:

$$\mathbf{na}=\frac{nr-2}{2}=\frac{6-2}{2}=2$$

A={3, 5}

En consecuencia, los impares no primos en R serán múltiplos de 3 y múltiplos de 5

El problema se reduce a ocupar los 6 lugares disponibles en R por el máximo de impares múltiplos de 3 y de 5.

Numero de lugares en R=6
[1 2 3 4 5 6]

La máxima ocupación se consigue cuando los múltiplos de 5 ocupan los lugares 1 y 6, y los múltiplos de 3 ocupan los lugares 2 y 5 quedando libres los lugares 3 y 4.

[1 2 3 4 5 6]

2 y 6 =lugares ocupados por múltiplos de 5
3 y 5 =lugares ocupados por múltiplos de 3

3 4 =lugares ocupados por números primos

El máximo número de lugares ocupados es 4. (**nr—2**=4)

Con cualquier otra combinación, el número de lugares en R ocupado por impares es menor que 4

Cuando los lugares primero y último se ocupan por múltiplos de 5, se consigue el máximo número de lugares en R ocupados por múltiplos de 5 (lugar 1 y lugar 6). Los cuatro lugares restantes solo pueden ser ocupados por impares múltiplos de 3 y, ya se ha visto en el supuesto anterior que cuando son 4, el número de lugares que pueden ser ocupados por múltiplos de 3, el máximo de lugares es 2. (en este caso lugares 2 y 5)

Como resumen*: Si se dispone de 6 lugares (nr=6) a ocupar por impares consecutivos, con la condición de que los impares no primos sean múltiplos de 3 y múltiplos de 5, el máximo de impares no primos posible es* ***nr—2.*** (6—2=4)

…………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………

- **nr=nr**

Generalizando para cualquier valor de **nr**

"Si se dispone de un número par de lugares **nr**, a ocupar por impares consecutivos, con la condición de que los impares no primos sean múltiplos 3, 5, 7, ………(nr—3), (nr—1), el máximo de lugares posibles ocupados por impares no primos es el doble del número de elementos del conjunto A"

$$A=\{3,5,7,\ldots\ldots\ldots nr-3, nr-1\}$$

$$2\cdot\frac{nr-2}{2}=\mathbf{nr-2}$$

Cada elemento de A es divisor de uno o más impares no primos, por lo que el máximo de lugares de nr, ocupados por impares no primos, se consigue asignado los impares no primos de la siguiente forma y en el siguiente orden:

-los lugares primero y último se asignan a dos impares múltiplos de (nr−1). Al disponer de nr lugares, el máximo de impares múltiplos de (nr−1), es 2

-Los lugares segundo y penúltimo se asignan a dos impares múltiplos de (nr−3). Al disponer de nr−2 lugares libres, el máximo de impares múltiplos de (nr−3) con posibilidad de ocupar lugares no ocupados anteriormente, es 2

-Los lugares tercero y antepenúltimo se asignan a dos impares múltiplos de (nr−5). Al disponer de nr−4 lugares libres, el máximo de impares múltiplos de (nr−5) con posibilidad de ocupar lugares no ocupados anteriormente, es 2

…………………………………………………………………..

…………………………………………………………………..

-los lugares $\frac{nr-4}{2}$ y $\frac{nr+6}{2}$ serán ocupados por dos múltiplos de 5.
Al disponer de 6 lugares libres, el máximo de impares múltiplos de 5 con posibilidad de ocupar lugares no ocupados anteriormente, es 2

-los lugares $\frac{nr-2}{2}$ y $\frac{nr+4}{2}$ serán ocupados por dos múltiplos de 3.
Al disponer de 4 lugares libres, el máximo de impares múltiplos de 3 con posibilidad de ocupar lugares no ocupados anteriormente, es 2

Como en cada ocupación se asigna el máximo de impares múltiplos de un elemento **a** perteneciente al conjunto **A**

A={3 ,5, 7,…………..(nr−3) ,(nr−1)}

se concluye que si se dispone de un número par de lugares **nr**, a ocupar por impares consecutivos, con la condición de que los impares no primos sean múltiplos 3, 5, 7, ...(nr—3), (nr—1), el máximo de lugares ocupados por impares no primos es **nr–2**

Si hay mas de dos impares no primos múltiplos de cada factor **a**, los dos primeros impares se asignaran a los lugares extremos no ocupados en la forma indicada anteriormente y el resto de impares múltiplos de **a**, se asignarán a lugares ya ocupados, cumpliendo la regla de separación.

Ej. nr=16

$$\mathbf{na}=\frac{nr-2}{2}=\frac{16-2}{2}=7$$

A={3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 }

Los impares no primos serán múltiplos de 3, 5, 7, 9, 11, 13 y 15

Numero de lugares en nr

[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16]

La máxima ocupación se consigue asignado:

[1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16]

1 y 16 =lugares ocupados por múltiplos de 15, de 5 y de 3
2 y 15 =lugares ocupados por múltiplos de 13
3 y 14 =lugares ocupados por múltiplos de 11
4 y 13 =lugares ocupados por múltiplos de 9 y de 3
5 y 12 =lugares ocupados por múltiplos de 7
6 y 11 =lugares ocupados por múltiplos de 5
7 y 10 =lugares ocupados por múltiplos de 3

8 y 9 =lugares ocupados por números primos

Con el procedimiento anterior, los lugares $\frac{nr}{2}$ y $\frac{nr+2}{2}$, no están ocupados por impares no primos, y por tanto, son lugares a ocupar por primos.

$$(nr-2)+2=nr$$

En la expresión anterior si **nr–2** es máximo, **2** es el número mínimo de primos en **nr**

Trasladando lo anterior a los lugares **nq**, ocupados por los impares consecutivos comprendidos entre $N(N-2)$ y N^2, siendo N cualquier número impar mayor que 1, comprobamos que las características de estos impares consecutivos son exactamente las mismas que las definidas anteriormente. En concreto las siguientes:

1º.- Entre los divisores de los impares no primos comprendidos entre $N(N-2)$ y N^2 se encuentran uno o más elementos del conjunto A

$$A=\{3, 5, 7 \ldots\ldots\ldots(nq-3), (nq-1)\}$$

nq=número de impares comprendidos entre $N(N-2)$ y N^2

2º.- Cada elemento de A es divisor de uno más impares no primos comprendidos entre los límites $N(N-2)$ y N^2

3º.- Un número par de lugares **nq**, ocupados por impares consecutivos

Por tanto, podemos concluir que:

Entre los impares consecutivos comprendidos entre $N(N-2)$ y N^2, el máximo posible de impares no primos es **nq–2**. Y en consecuencia, el mínimo de primos es **2**.

$$nq-2+2=nq$$

nq=número de impares comprendidos entre $N(N-2)$ y N^2

c.q.d

Nota 1.- El procedimiento utilizado no es exclusivo para llegar a la conclusión antes citada. Pero es el mas sencillo.
Nota 2.- Aunque con el procedimiento utilizado se reflejan situaciones reales como:

-nr=4; 15, 17,19, 21 (los dos centrales son primos y los extremos múltiplos de 3

-nr=6; 25, 27, 29, 31, 33, 35 (los dos centrales son primos, el segundo y penúltimo son múltiplos de 3, y el primero y último son múltiplos de 5)

…………………..

El verdadero objetivo es demostrar que para cualquier valor de nr, el mínimo número de primos en nr, es 2

Nota 4 : El mínimo de primos =2, solo se cumple para N=3

N=3

-Limites

$$N(N-2)=(1)(3)=3$$

$$N^2=3^2=9$$

-Elementos comprendidos entre los límites 3 y 9

$$Q=\{5,7\}$$

5,7=números primos

Para valores de N>3 el número de primos comprendidos entre los límites $N(N-2)$ y N^2, es mayor que 2

COMENTARIO

Aun cuando se sabe que los números primos son infinitos, el Teorema cuantifica un mínimo de primos (2), para conjuntos de impares acotados en función de N.

El Teorema es así mismo otra demostración más de que el número de primos es infinito

REPRESENTACION GRAFICA

De la misma forma que en la conjetura de Gauss (convertida en teorema por Jacques Hadamard y C.J.de la Vallee Poussin), para valores muy grandes de x, expresa:

$$\pi(x)\approx x/\ln(x)$$

Representamos en nuestro caso, las funciones:

y1(u)=u/pi(u)

y2(u)=ln(u)

para los valores

u=3, 5, 7, 9, 11,……………………N

pi(u)=2, 3, 4, 4, 5,………………………

pi(u)=conjunto de primos comprendidos entre u(u-2) y u^2

generándose la **GRAFICA 1**, donde se puede observar el ajuste de la función ln(u) a los valores u/pi(u).

En la **GRAFICA 2**, se representan las funciones

y3=pi(u)

y4= u/ln(u)

para los valores:

u=3, 5, 7, 9, 11,……………………N

pi(u)=2, 3, 4, 4, 5,………………………

pi(u)=conjunto de primos comprendidos entre u(u-2) y u^2

El ajuste 'cuasi perfecto' de las funciones ln(u) y u/ln(u) a los valores u/pi(u) y pi(u) respectivamente, invita a reflexionar sobre la relación entre el número de primos comprendido en el intervalo **u(u-2) y u²** y el número **e**

En Matemáticas nada ocurre por casualidad.

**Este trabajo lo dejo para otros investigadores, mi dedicación a los números primos ha terminado.

Valores de: u, pi(u)

u=impares; $3 \leq u \leq 10003$

pi(u)=primos comprendidos entre u(u-2) y u^2

u	**pi(u)**
3	2
5	3
7	4
9	4
11	5
13	5
15	4
17	7
19	6

…………..

893……. 136

…………..

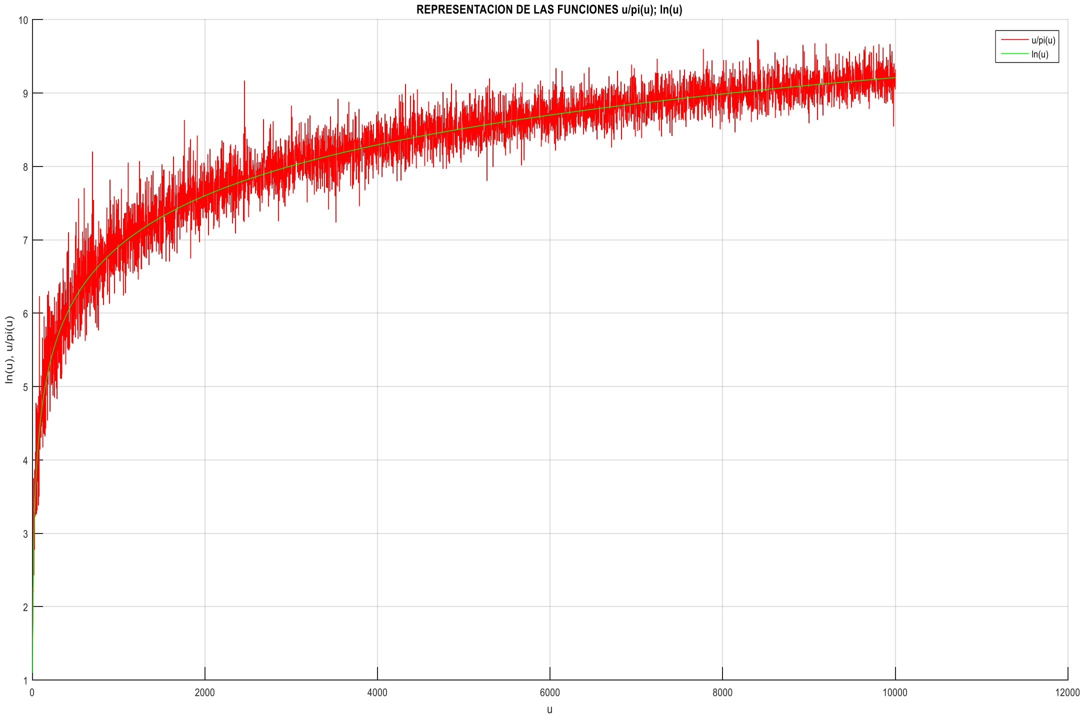
5227……602

…………..

10003….1073

Ej. Si u=893; pi(u)=136, que son los primos comprendidos entre 893x891 y 893^2

GRAFICA I



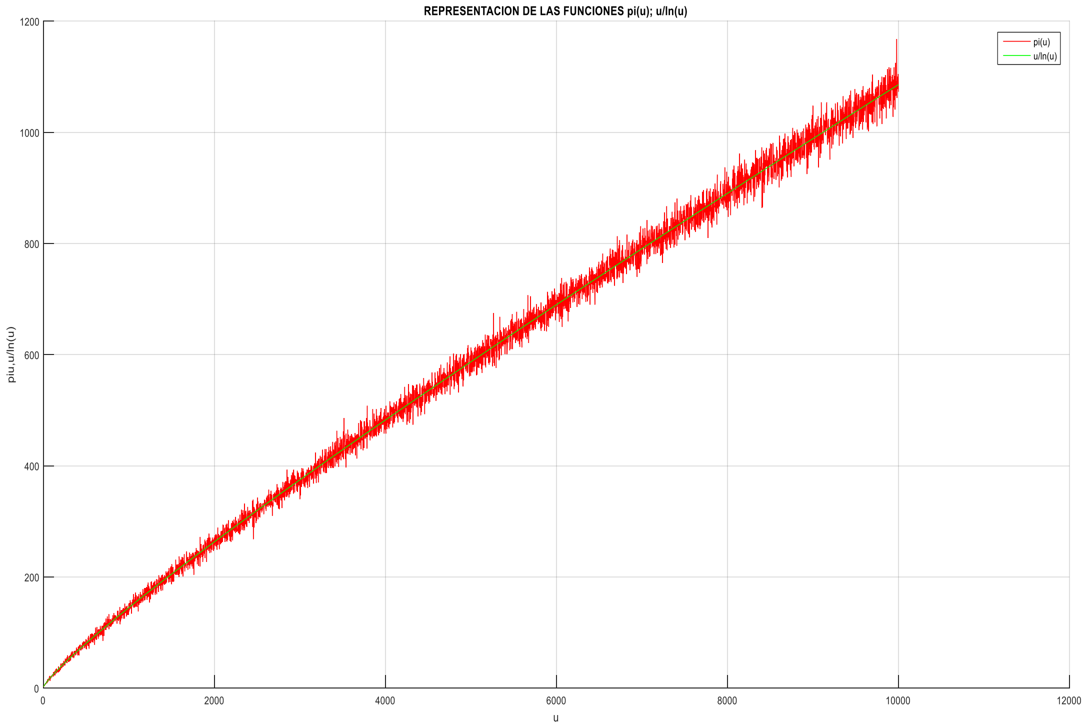
Leyenda:

--------- u/pi(u)

--------- ln(u)

$3 \leq u \leq 10003$

GRAFICA II



Leyenda:

--------- pi(u)

--------- u/ln(u)

$3 \leq u \leq 10003$

CONJETURA:

Puesto que en el campo de los números primos predominan las conjeturas sobre los teoremas, quizás porque resulte más fácil proponer una conjetura que demostrarla, propongo la siguiente:

"*El conjunto de números impares comprendido entre los valores $N(N-1)$ y N^2, siendo N cualquier número impar mayor que 1, contiene al menos un número primo*".

EPILOGO

A lo largo de la historia muchos matemáticos han dedicado parte de su tiempo a descubrir una secuencia, un término general, por el que se pudiera determinar que número primo sigue a uno dado, en definitiva, predecir la secuencia de números primos. Sin embargo, ninguno lo ha conseguido.

Se puede caer en la siguiente tentación: *Si no es posible determinar un "Término General" de la sucesión de números primos, se podrá demostrar que dicho T.G no se puede hallar.*

Ante tal tesitura, tengo la enorme duda de no saber que empresa de las dos anteriores es más complicada.

Con el siguiente ejemplo, pretendo fijar mi posición al respecto.

Puesto que para la sucesión de números primos:

2 3 5 7 11 13 17………

no parece sencillo encontrar un T.G, se trata de obtener los números primos a partir de los no primos. (método indirecto)

Así, considerando únicamente números impares, si se pudiera obtener un T.G para la sucesión de impares no primos,

9 15 21 25 27 33………..

se podrá saber si un determinado número es primo o no.

Para ello, comenzaremos con los múltiplos de 3, donde es fácil obtener su T.G

9 15 21 27 33 39………6n+3

Obviamente en la sucesión anterior no están todos los impares no primos. Faltan algunos múltiplos de 5, de 7, de 11, de 13……

Los múltiplos de 5 a añadir a los múltiplos de 3 son:

25 35 55 65 85 95 115 125……………

Los múltiplos de 7 a añadir son:

49 77 91 119 133 ……………

…………………………………………………………………………………………………..

Se comprueba rápidamente que la sucesión de múltiplos de 5 a añadir a los múltiplos de 3,

25 35 55 65 85…………

no tiene un T.G. fácil de determinar, es más, los divisores de los términos de esta sucesión son los números primos que siguen a 5, incluido el propio 5. Con lo que se nos presenta el siguiente problema: Pretendemos saber que números primos siguen al número 5. Para ello necesitamos calcular el T.G de la sucesión de múltiplos de 5 que no sean múltiplos de 3 y resulta que cada termino de esta sucesión se forma por el producto de 5 por los números primos que siguen a 5 incluido el propio 5.

Lo mismo nos ocurre al añadir los múltiplos de 7, que no sean múltiplos de 3 y de 5.

49 77 91 119 133 ……………

Cada término de esta sucesión esta formado por el producto de los primos mayores o iguales que 7. Para determinar el T.G de esta sucesión deberíamos conocer previamente que relación hay entre los primos mayores o iguales a 7. Y esto último es precisamente lo que estamos buscando.

……

Así mismo para definir cada una de las sucesiones anteriores:

-múltiplos de 5

-múltiplos de 7

-múltiplos de 11

-múltiplos de 13

……………………..

necesito conocer un nuevo número primo, (5,7,11,….) por lo que concluyo que me es imposible determinar los T.G de dichas sucesiones ya que para ello debo conocer la relación entre los números primos que siguen a uno dado, **y eso es precisamente lo que pretendo encontrar.**

Por último, recordando la afirmación de Euler:

“Tengo razones para creer que este es un misterio en el que la mente humana jamás podrá penetrar”

me inclino por la resignación (aunque esta no es buena compañera en matemáticas), en el sentido de que para saber si un número es primo o no, solo podemos aplicar los procedimientos que conocemos:

-MEDIANTE CRIBADO (ERASTOTENES)

-APLICANDO LA DEFINICION DE NUMERO PRIMO (número primo es aquel que solo es divisible por si mismo y por la unidad)