PRESENTACION

El trabajo se estructura en cinco capítulos. El primer capítulo se dedica al estudio de las ternas pitagóricas y en él se aportan cinco procedimientos para la formación de ternas pitagóricas primitivas.

La aplicación de los los procedimientos de formación de ternas pitagóricas a la ecuación $x^n-a^n=b^n$, con $n>2$, se contempla en los capítulos segundo, tercero y cuarto. En estos capítulos se extraen conclusiones que, en algunos casos, permiten afirmar la veracidad del Teorema de Fermat, y en otros, simplemente se señala un camino para su demostración.

El capítulo V se dedica el estudio de algunas propiedades de las ternas pitagóricas primitivas.

MIGUEL ARIAS FERNANDEZ **octubre 2018**

INDICE

CAPITULO I

LEYES DE FORMACION DE TERNAS PITAGORICAS

PROCEDIMIENTO {I}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2-a^2=b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Si **r,p** son números enteros positivos con **r>p**, podemos expresar **b** como el producto de dos números enteros

$$b=rp$$

$$b^2=r^2p^2$$

Si factorizamos la ecuación (1)

$$(x+a)(x-a)=b^2$$

$$(x+a)(x-a)=r^2p^2$$

Podemos expresar

$$(x+a)=r^2$$

$$(x-a)=p^2$$

Despejando x, a

$$x=\frac{r^2+p^2}{2}$$

$$a=\frac{r^2-p^2}{2}$$

Si elevamos al cuadrado y sustituimos en la ecuación (1)
$(r^2+p^2)^2/4-(r^2-p^2)^2/4= r^2p^2$

Se obtiene la expresión

$$(r^2+p^2)^2-(r^2-p^2)^2=4\, r^2p^2$$

Si expresamos

$y= (r^2+p^2)$

$c=(r^2-p^2)$

$d=2rp$

elevamos al cuadrado, y sustituimos, se obtiene la ecuación

$$y^2-c^2=d^2$$

cuyas ternas (**y,c,d**), son números enteros positivos para cualquier par de valores de **r,p**, enteros positivos con **r>p**

Dichas ternas en función de **r,p** son:

$$[(r^2+p^2), (r^2+p^2),2rp]$$

Si **r** y **p** solo tienen como divisor común la unidad, la terna obtenida es primitiva

Si **r** y **p** tienen otros divisores comunes además de la unidad, la terna obtenida no es primitiva

Por tanto para la obtención de *ternas primitivas* se tomaran pares de valores **r,p** con las siguientes posibilidades.

1ª- r=impar, r=par

2ª r=par, r=impar.

y en ambas posibilidades **r** y **p** solo tienen como divisor común la unidad.

B).- A la misma conclusión se puede llegar si para obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2 - a^2 = b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Se divide ambos términos por **b²** y se factoriza

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{x}{b} + \frac{a}{b}\right)\left(\frac{x}{b} - \frac{a}{b}\right) = 1$$

La igualdad anterior se mantiene si expresamos:

$$\frac{x}{b} + \frac{a}{b} = \frac{r}{p}$$

$$\frac{x}{b} - \frac{a}{b} = \frac{p}{r}$$

Donde **r,p** son números enteros positivos con **r>p**

Despejando

$$\frac{2x}{b} = \frac{r^2 + p^2}{rp}$$

$$\frac{2a}{b} = \frac{r^2 - p^2}{rp}$$

Pudiendo establecerse

$x = r^2 + p^2$

$a = r^2 - p^2$

$b = 2rp$

Transformándose la ecuación (1) en

$$(r^2+p^2)^2 - (r^2 - p^2)^2 = (2rp)^2$$

Cuyas ternas son: $(r^2+p^2, r^2-p^2, 2rp)$

Dando valores enteros positivos a **r,p**, con **r>p** , se obtienen todas las ternas pitagóricas con las siguientes condiciones:

1ª- r=impar, r=par

2ª r=par, r=impar.

y en ambas posibilidades **r** y **p** solo tienen como divisor común la unidad.

C).-También, se obtienen los mismos resultados factorizando directamente la expresión

$$x^2 - a^2 = b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

$$(x+a)(x-a) = b^2$$

Si **r** y **p** son números enteros positivos, con **r>p**, podemos expresar

$$(x+a) = 2r^2$$

$$(x-a) = 2p^2$$

Despejando **x, a**

$$2x = 2r^2 + 2p^2$$

$$2a = 2r^2 - 2p^2$$

$$x = r^2 + p^2$$

$$a = r^2 - p^2$$

$$b = 2rp$$

Transformándose la ecuación (1) en

$$(r^2+p^2)^2 - (r^2-p^2)^2 = (2rp)^2$$

Cuyas ternas son: $(r^2+p^2, r^2-p^2, 2rp)$

dando valores enteros positivos a **r,p**, con **r>p** , se obtienen todas las ternas pitagóricas

FORMACIÓN DE TERNAS PITAGÓRICAS PRIMITIVAS PARA LOS SUPUESTOS ANTERIORES, A), B), C)

Condiciones:

$x=r^2 + p^2$

$a=r^2-p^2$

$b=2rp$

Con las siguientes posibilidades:

1ª- r=impar, r=par

2ª r=par, r=impar.

y en ambas posibilidades ***r*** *y* ***p*** *solo tienen como divisor común la unidad.*

Las ternas pitagóricas primitivas se obtienen dando valores a **r,p** con las condiciones anteriores

r=2, p=1, x=5, a=3, b=4 Terna (5,3,4)

r=3, p=2, x=13, a=5, b=12 Terna (13,12,5)

r=4, p=1, x=17, a=15, b=8 Terna (17,15,8)

p=3, x=25, a=7, b=24 Terna (25,7,24)

r=5, p=2, x=29, a=21, b=20 Terna (29,21,20)

p=4, x=41, a=9, b=40 Terna (41,9,40)

r=6, p=1, x=37, a=35, b=12 Terna (37,35,12)

p=3, x=45, a=27, b=36 ~~Terna (45,27,36)~~ Terna no primitiva

(r=múltiplo de p)

p=5, x=61, a=11, b=60 Terna (61,11,60)

r=7, p=2, x=53, a=45, b=28 Terna (53,45,28)

p=4, x=65, a=33, b=56 Terna (65,33,56)

p=6, x=85, a=13, b=84 Terna (85,13,84)

r=8, p=1, x=65, a=63, b=16 Terna (65,63,16)

p=3, x=73, a=55, b=48 Terna (73,55,48)

p=5, x=89, a=39, b=80 Terna (89,39,80)

p=7, x=113, a=15, b=112 Terna (113,15,112)

r=9, p=2, x=85, a=77, b=36 Terna (85,77,36)

p=4, x=97, a=65, b=72 Terna (97,65,72)

p=6, x=117, a=45, b=108 Terna (117,45,108)

p=8, ...

....

Nota: las ternas en azul, son las ternas primitivas (x,a,b) donde x< 100

PROCEDIMIENTO {II}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2-a^2=b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x=r+p \qquad (2)$$

siendo **r,p,** números enteros positivos. (**r>p**)

Así mismo, todo número entero positivo puede expresarse como la diferencia de dos números enteros positivos, por lo que establecemos:

$$a=r-p \qquad (3)$$

con **r,p** números enteros positivos y **r>p**

A su vez, todo par de números enteros positivos **x, a,** que cumpla la ecuación (1), se puede expresar en función de **r, p,** aplicando (2) y (3).

Elevando al cuadrado las expresiones (2) y (3)

$$x^2=(r+p)^2=r^2+p^2+2rp$$

$$a^2=(r\text{-}p)^2=r^2+p^2-2rp$$

$$b=2(rp)^{1/2}$$

Si llamamos C, a la suma de los términos de orden impar en el desarrollo del binomio de Newton

$$C= r^2+p^2$$

Si llamamos D, a la suma de los términos de orden par en el desarrollo del binomio de Newton

$$D= 2rp$$

Sustituyendo

$$x^2=C+D$$

$$a^2=C-D$$

1) Si multiplicamos las expresiones anteriores, se obtiene

$$C^2-D^2= x^2a^2$$

Si llamamos

$$E=xa$$

Obtenemos la ecuación

$$\mathbf{C^2-D^2= E^2 \quad (I)}$$

Donde C, D, E son enteros positivos ya que **r,p**, son enteros positivos.

La ecuación anterior nos permite obtener todas las ternas pitagóricas (C, D, E).

Dando valores enteros positivos a **r,p**, con **r>p**, se obtienen los términos

$$C= r^2+p^2$$

$$D= 2rp$$

$$E=r^2-p^2$$

Transformándose la ecuación **(I)** en

$$(r^2+p^2)^2 - (2rp)^2=(r^2-p^2)^2 \quad (4)$$

Ej.1 r=3; p=2; $13^2-12^2=5^2$ (terna 13,12,5)

Ej.2 r=6; p=2; $40^2-24^2=32^2$ (terna 40,24,32)

Si **r** y **p** solo tienen como divisor común la unidad, la terna obtenida es primitiva. Los términos C, D, E son primos entre sí. (Ej.1)

Si **r** y **p** tienen otros divisores comunes además de la unidad, la terna obtenida no es primitiva. (Ej.2)

Por tanto para la obtención de ternas primitivas se tomaran pares de valores **r,p** con las siguientes posibilidades.

1ª- r=impar, p=par

2ª r=par, p=impar.

y en ambas posibilidades **r**, y **p** solo tienen como divisor común la unidad

La pareja (r=6, p=3) se elimina porque 6 es múltiplo de 3 y su aplicación da lugar a una terna no primitiva

La forma de obtención de ternas primitivas es la misma que la aplicada en el Procedimiento (I)

En este caso

$$C= r^2+p^2$$

$$D= 2rp$$

$$E=r^2-p^2$$

dando valores enteros positivos a r,p, con r>p , se obtienen todas las ternas pitagóricas con las siguientes posibilidades:

1ª- r=impar, r=par

2ª r=par, r=impar.

y en ambas posibilidades r y p solo tienen como divisor común la unidad.

2) Si restamos las expresiones:

$$x^2=C+D$$

$$a^2=C-D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^2-a^2=2D \quad (II)}$$

Sustituyendo **x**, **a**, y **C** por sus valores en función de **r,p**

$$(r+p)^2 - (r-p)^2=4rp \quad (5)$$

Para que de la expresión anterior puedan obtenerse todas las ternas pitagóricas, es necesario que

$$2D = b^2$$

-b=entero positivo elevado al cuadrado

Sustituyendo:

$$4rp = b^2$$

$$rp = b^2/4$$

Como el producto **rp** ha de ser entero, es necesario que **b** = número par

Dando valores pares a **b>2** se obtienen todos los pares de valores **r,p**

b=4; rp=16/4=4; r=4, p=1 Terna (5,3,4)

b=6; rp=36/4=9; r=9, p=1 Terna (10,8,6)

b=8; rp=64/4=16; r=16, p=1, Ter. (17,15,8); r=8, p=2 Ter. (10,6,8)

b=10; rp=100/4=25; r=25, p=1 Terna (26,24,5)

…………………………………………..

…………………………………………..

El trabajo anterior se puede facilitar haciendo:

$$r = u^2$$

$$p = v^2$$

con **u,v** números enteros positivos y **u>v**

Sustituyendo en la expresión (4), se obtiene

$$\mathbf{(u^2+v^2)^2 - (u^2-v^2)^2 = (2uv)^2 \quad (ii)}$$

Cuyas ternas son: $(u^2+v^2,\ u^2-v^2,\ 2uv)$

Dando valores enteros positivos a **u,v**, con **u>v** , se obtienen todas las ternas pitagóricas

Ej.-3 u=7; p=2; $53^2-45^2=28^2$ (terna 53,45,28)

Si **u** y **v** solo tienen como divisor común la unidad, la terna obtenida es primitiva

Si **u** y **v** tienen otros divisores comunes además de la unidad, la terna obtenida no es primitiva

La forma de obtención de ternas primitivas es la misma que la aplicada en el Procedimiento (I)

En este caso

$$x= u^2+v^2$$

$$a=u^2-v^2$$

$$(2D)= 4u^2v^2$$

dando valores enteros positivos a u,v, con u>v , se obtienen todas las ternas pitagóricas con las siguientes posibilidades:

1ª- u=impar, v=par

2ª u=par, v=impar.

y en ambas posibilidades r y p solo tienen como divisor común la unidad.

3) Si sumamos las expresiones:

$$x^2=C+D$$

$$a^2=C-D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^2+a^2=2C\ (III)}$$

$$x^2+a^2=2r^2+2p^2$$

Sustituyendo **x**, **a**, y **C** por sus valores en función de **r,p**

Se obtiene la ecuación:

$$(r+p)^2 + (r-p)^2=2r^2+2p^2 \ (6)$$

Para que puedan obtenerse todas las ternas pitagóricas, es necesario que

$$2C=c^2$$

-c= número entero positivo

Sustituyendo en la ecuación **(III),** se obtiene

$$(r+p)^2 + (r-p)^2=c^2 \ (iii)$$

Cuyas ternas son

$$(r+p, r-p, c)$$

Deberán encontrarse los pares de valores **r,p** que satisfazgan la ecuación

$$2r^2+2p^2=c^2$$

Ello puede conseguirse por tanteos, dando valores a **r** y **p** hasta cumplir dicha condición. (**c** ha de ser número par)

(r=7, p=1) $8^2+6^2=10^2$ terna (8,6,10)

(r=14, p=2) $16^2+14^2=20^2$ terna (16,14,20)

(r=17, p=7) $24^2+10^2=26^2$ terna (24,10,26)

Acontinuación se indica un procedimiento para la obtención de todas las ternas pitagóricas primitivas, sin necesidad de ir probando por tanteos

……………………………………………………………………

OBTENCIÓN DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS PRIMITIVAS GENERADAS POR LA ECUACIÓN

$$\mathbf{x^2+a^2=2C \quad (III);}$$

$$2C=c^2;$$

Expresando la ecuación anterior en función de **r,p:**

$$(r+p)^2 + (r-p)^2=2r^2+2p^2$$

Podemos identificar

$$c^2=2r^2+2p^2$$

$$d^2=(r-p)^2$$

$$f^2=(r+p)^2$$

Ordenando los términos, resulta:

$$c^2-d^2=f^2$$

Las ternas generadas por la ecuación anterior, no son ternas primitivas ya que el termino **c** es siempre par para cualquier par de valores **r,p.**

Dividiendo por 2 los elementos de la terna, resulta:

$[(2r^2+2p^2)^{1/2}, (r\text{-}p), (r+p)]$

Identificando:

$$c=((r^2+p^2)/2)^{1/2}$$

$$d=(r-p)/2$$

$$f=(r+p)/2$$

Si **u,v**=números enteros positivos, **u>v**, se pueden establecer las

siguientes expresiones:

$$(r-p)/2=u^2-v^2$$

$$(r+p)/2=2uv$$

$$((r^2+p^2)/2)^{1/2}=u^2+v^2$$

Operando:

$$r-p= 2u^2-2v^2$$

$$r+p=4uv$$

$$2r=2u^2-2v^2+4uv$$

$$2p=4uv+2v^2-2u^2$$

Resulta:

$$r=u^2-v^2+2uv$$

$$p=2uv+v^2-u^2$$

Con **u>v**, el termino **r** es siempre positivo, pero el termino **p** puede ser positivo o negativo. Por ello tomamos el valor absoluto de **p**

Obteniéndose **r** y **p** en función de u,v:

$$r=u^2-v^2+2uv \quad (7)$$

$$p=\mathrm{abs}(2uv+v^2-u^2) \quad (8)$$

Por tanto para la obtención de ternas primitivas se tomaran pares de valores **u,v** con las siguientes posibilidades.

1ª- u=impar, v=par

2ª u=par, v=impar.

y en ambas posibilidades **u**, y **v** solo tienen como divisor común la unidad

Dando valores a **u,v** se obtienen las pareja de valores **r,p**, que sustituidos en:

$$c=((r^2+p^2)/2)^{1/2}$$

$$d=(r-p)/2$$

$$f=(r+p)/2$$

generan las ternas pitagóricas primitivas:

u=2, v=1, r=7, p=1, c=5, d=3, f=4 Terna (5,3,4)

u=3, v=2, r=17, p=7, c=13, d=5, f=12 Terna (13,5,12)

u=4, v=1, r=23, p=7, c=17, d=15, f=8 Terna (17,15,8)

u=4, v=3, r=31, p=17, c=25, d=7, f=24 Terna (25,7,24)

u=5, v=2, r=41, p=1 c=29, d=21, f=20 Terna (29,21,20)

u=5, v=4, r=49, p=31 c=41, d=9, f=40 Terna (41,9,40)

u=6, v=1 r=47, p=23 c=37, d=35, f=12 Terna (37,35,12)

u=6, v=3 r=63, p=9 c=45, d=27, f=36 ~~Terna (45,27,36)~~Terna no primitiva (u=múltiplo de v)

u=6, v=5 r=71, p=49 c=61, d=11, f=60 Terna (61,11,60)

u=7, v=2 r=73, p=17 c=53, d=45, f=28 Terna (53,45,28)

u=7, v=4 r=89, p=23 c=65, d=33, f=56 Terna (65,33,56)

u=7, v=6 r=97, p=71 c=85, d=13, f=84Terna (85,13,84)

u=8, v=1 r=79, p=47 c=65, d=63, f=16Terna (65,63,16)

u=8, v=3 r=103, p=7 c=73, d=55, f=48Terna (73,55,48)

u=8, v=5 r=119, p=41 c=89, d=39, f=80Terna (89,39,80)

u=8, v=6 r=127, p=97 c=113, d=15, f=112Terna (113,15,112)

u=9, v=2 r=113, p=41 c=85, d=77, f=36Terna (85,77,36)

u=9, v=4 r=137, p=7 c=97, d=65, f=72Terna (97,65,72)

u=9, v=6 r=153, p=63 c=117, d=13, f=108Terna (117,13,108)

u=9, v=8 ....

....

Nota: las ternas en azul, son las ternas primitivas (c,d,f) donde c< 100

ANALÍSIS CONJUNTO DE LAS ECUACIONES OBTENIDAS.

Si partimos de las ecuaciones (I) y (II)

$$C^2-D^2=E^2 \quad (I)$$

$$x^2-a^2=2D \quad (II);\ 2D=b^2$$

Igualamos **D** en ambas expresiones y sustituimos su valor en función de **r,p**, se pueden obtener los pares de valores **r,p** comunes a ambas expresiones

$$D=b^2/2$$

$$2rp=b^2/2$$

Siendo los valores de **r,p** comunes a (I) y (II) los que cumplen:

$$rp=b^2/4$$

La pareja **r** y **p**, se obtendría dando valores a **b** (**b** ha de ser número par), de la siguiente forma:

b=2; rp=1; ~~r=1, p=1~~ (no cumple las hipótesis de partida r>p)

b=4; rp=4; r=4; p=1; ~~r=2; p=2~~

b=6; rp=9; r=9; p=1; ~~r=3; p=3~~

b=8; rp=16; r=16; p=1; r=8; p=2; ~~r=4; p=4~~

……………………………………………………………………………

Es decir, **r** y **p** son divisores de ($b^2/4$), con **b =** par, entero, positivo

Si partimos de las ecuaciones (I) y (III)

$$C^2-D^2=E^2 \quad (I)$$

$$x^2+a^2=2C \quad (III);\ 2C=c^2;$$

Igualamos **C** en ambas expresiones y sustituimos su valor en función de **r,p**, se pueden obtener los pares de valores **r,p** comunes a ambas expresiones

$$C=r^2+p^2$$

$$2C=c^2;$$

$$c^2=2r^2+2p^2$$

Siendo los valores de **r,p** comunes a (I) y (III) los que cumplen:

$$r^2+p^2= c^2/2$$

Deberán encontrarse los pares de números **r,p** que satisfazgan la ecuación:

$$2r^2+2p^2=c^2$$

Anteriormente se ha indicado un procedimiento para la obtención de los pares de valores **r,p** que generan valores de **c** enteros, y por tanto comunes a las ecuaciones (I) y a (III)

Como resumen:

- existen parejas de valores r,p comunes a (I) y (II),

-así mismo, existen parejas de valores r,p comunes a (I) y (III),

-por tanto, las ecuaciones (I), (II) y (III), cada una de ellas, son generadoras de todas las ternas pitagóricas.

PROCEDIMIENTO {III}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2-a^2=b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros.

Si **n**, es un número entero positivo se pretende asociar al número **n**, ternas pitagóricas primitivas, de la siguiente forma:

Si n=par, las ternas (x,a,b) se corresponderían con las siguientes expresiones

$[n^2+(n-1)^2, n^2-(n-1)^2, 2n(n-1)]$

$[n^2+(n-3)^2, n^2-(n-3)^2, 2n(n-3)]$

$[n^2+(n-5)^2, n^2-(n-3)^2, 2n(n-5)]$

……………………………………………

……………………………………………

$[n^2+5^2, n^2-5^2, 2n\cdot 5]$

$[n^2+3^2, n^2-3, 2n\cdot 3]$

$[n^2+1^2, n^2-1^2, 2n\cdot 1]$

Ej. Si n=8, de acuerdo con lo anterior las ternas pitagóricas primitivas asociadas al número 8 serán:

[64+49, 64–49, 2x8x7]; Terna : (113,15,112); $113^2-15^2=112^2$

[64+25, 64–25, 2x8x5]; Terna: (89,39,80); $89^2-39^2=80^2$

[64+9, 64–9, 2x8x3]; Terna: (73,55,48); $73^2-55^2=48^2$

[64+1, 64–1, 2x8x1]; Terna: (65,63,16); $65^2-63^2=16^2$

Si n=impar, las ternas [x,a,b] se corresponderían con las siguientes expresiones:

[$n^2+(n-1)^2$, $n^2-(n-1)^2$, $2n(n-1)$]

[$n^2+(n-3)^2$, $n^2-(n-3)^2$, $2n(n-3)$]

[$n^2+(n-5)^2$, $n^2-(n-3)^2$, $2n(n-5)$]

……………………………………………

……………………………………………

[n^2+6^2, n^2-5^2, $2n\cdot 6$]

[n^2+4^2, n^2-3, $2n\cdot 4$]

[n^2+2^2, n^2-1^2, $2n\cdot 2$]

Ej. Si n=7, de acuerdo con lo anterior las ternas pitagóricas primitivas asociadas al número 7 serán:

[49+36, 49–36, 2x7x6]; Terna (85,13,84); $85^2-13^2=84^2$

[49+16, 49–16, 2x7x4]; Terna (65,33,56); $65^2-33^2=56^2$

[49+4, 49–4, 2x7x2]; Terna (53,45,28); $53^2-45^2=28^2$

Pudiendo establecerse la siguiente formula general para las ternas:

$$[\, n^2+i^2,\ n^2-i^2,\ 2ni]$$

Donde:

Si n=par, i, toma valores impares, 1,3,5,7,…………….n–1

Si n=impar, i, toma valores pares, 2,4,6,8,…………n–1

Obteniéndose **x**, **a**, **b** en función de **n,i:**

$$x=(n^2+i^2)$$

$$a=(n^2-i^{2)})$$

$$b=2ni$$

Con este procedimiento, a cada número **n**, entero positivo, se asocian un conjunto de ternas pitagóricas primitivas, tal que si el numero **n** es par, el número de ternas primitivas es **n/2.** (Al valor anterior, se le restará el número de ternas donde **n** es múltiplo de **i**)

Si el numero **n**, es impar el número de ternas primitivas es **(n–1)/2.** (Al valor anterior se restará el número de ternas donde **n** es múltiplo de **i)**

Este procedimiento difiere únicamente del procedimiento **{I}** en que se han dispuesto las incógnitas **n**, **i** de forma que asocian las ternas pitagóricas primitivas a números **n** enteros positivos.

OBTENCIÓN DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS PRIMITIVAS ASOCIADAS A UN NUMERO (n)

A continuación se expone el procedimiento de obtención de las ternas primitivas generadas por los diez primeros números utilizando la expresión:

$$[\, n^2+i^2,\ n^2-i^2,\ 2ni]$$

Con las condiciones:

Si i=par, i, toma valores 1,3,5,7,................n−1

Si i=impar, i, toma valores 2,4,6,8,...........n−1

Dando valores se obtiene:

n=2 ; i=1; [4+1, 4−1, 2·2·1], T(5,3,4)

n=3 ; i=2; T(13,5,12)

n=4; i=1; T(17,15,8)

i=3; T(25,7,24)

n=5; i=2; T(29,21,20)

i=4; T(41,9,40)

n=6; i=1; T(37,35,12)

i=3; ~~T(45,27,36)~~ Terna no primitiva (**n** es múltiplo de i)

i=5; T(61,11,60)

n=7; i=2; T(53,45,28)

i=4; T(65,33,56)

i=6; T(85,13,84)

n=8; i=1; T(65,63,16)

i=3; T(73,55,48)

i=5; T(89,39,80)

i=7; T(113,15,112)

n=9; i=2; T(85,77,36)

i=4; T(97,65,72)

i=6; T(117,65,108)

i=8; T(145,17,144)

n=10; i=1; T(101,99,20)

i=3; T(109,91,60)

i=5; ~~T(125,75,100)~~ Terna no primitiva(n es múltiplo de i)

i=7; T(149,51,140)

i=9; T(181,19,180)

Nota: las ternas en azul, son las ternas primitivas (x,a,b) donde x< 100

El número de ternas asociadas a los diez primeros números enteros positivos son:

Números pares en los 10 primeros números= (2,4,6,8,10)

Nº ternas pitagóricas (2+4+6+8+10)/2=15 (Se descuento una terna porque 6 es múltiplo de 3)

Números impares en los 10 primeros números (3,5,7,9)*

Nº de ternas pitagóricas ((3–1)+(5–1)+(7–1)+(9–1))/2=20/2=10

(Se descuenta una terna porque 10 es múltiplo de 5)

Nº de ternas pitagóricas primitivas generadas por los 10 primeros números enteros positivos

$$15-1+10-1=23$$

*En el conjunto de números n, se excluye el 1 por razones obvias.

B).-En relación con el apartado anterior, se tratará de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2-a^2=b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos, asociando dichas ternas al termino **b.**

Para ello factorizamos la ecuación (1)

$$(x+a)\,(x-a)=b^2$$

Si: **γ**=todos los divisores de **b^2**, que generan valores enteros positivos de **x,a.**

podemos expresar:

$$(x+a)=(b^2)/\gamma$$

$$(x-a)=\gamma$$

Despejando **x**, **a**, se obtiene:

$$x=\frac{b^2+\gamma^2}{2\gamma}$$

$$a=\frac{b^2-\gamma^2}{2\gamma}$$

Pudiendo asociar al término **b**, todas las ternas posibles, donde, en función de la paridad de **b**, se establecen las siguientes condiciones:

-Si **b** es impar:

-en los divisores de b^2 se incluye el 1, y se descartan los valores donde **$\gamma \geq b$**

-Si **b** es par:

-se descartan los valores donde **$\gamma \geq b$**

-si establecemos **$b=\gamma\delta$**, donde **γ,δ**=enteros positivos, se descartan los valores de **γ**, donde en el producto **$\gamma\delta$**, uno de los dos factores es impar

Ej1. b=15 (impar)

Los divisores de 15^2, son:

1,3,5,9,15,25,45,75

Se descartan los **$\gamma \geq b$** (15,25,45,75), y se obtienen todas las ternas **(x,a,15),** que cumplen la ecuación (1), o lo que es lo mismo, se obtienen todas las ternas asociadas al termino **b=15**

γ=1

$$x = \frac{15^2 + 1^2}{2}$$

$$a = \frac{15^2 - 1^2}{2}$$

Terna (113,112,15)

γ=3

$$x = \frac{15^2 + 3^2}{6}$$

$$a = \frac{15^2 – 3^2}{6}$$

Terna (39,36,15)

γ=5

$$x = \frac{15^2 + 5^2}{10}$$

$$a = \frac{15^2 – 5^2}{10}$$

Terna (25,20,15)

γ=9

$$x = \frac{15^2 + 9^2}{18}$$

$$a = \frac{15^2 – 9^2}{18}$$

Terna (17,8,15)

Nota: las ternas en azul son primitivas.

Ej2. b=6 (par)

Los divisores de 6^2 , son:

1,2,3,4,6,9,12,18,36

Si en los productos:

~~(1)(36)~~

(2)(18)

~~(3)(12)~~

~~(4)(9)~~

Eliminamos aquellos en que uno de los factores es impar, queda como valor de γ:

$$\gamma=2$$

De esta forma se obtienen todas las ternas **(x,a,6),** que cumplen la ecuación (1), o lo que es lo mismo, se obtienen todas las ternas asociadas al término **b= 6**

γ=2

$$x = \frac{6^2 + 2^2}{4}$$

$$a = \frac{6^2 - 2^2}{4}$$

En este caso una única Terna asociada al número b=6:

(10,8,6)

OBTENCIÓN DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS PRIMITIVAS ASOCIADAS Al TERMINO (b) EN LA ECUACION:

$$x^2 - a^2 = b^2 \quad (1)$$

Si aplicando lo anterior, se quieren obtener todas las ternas primitivas, se toman como valores de **b**, los que cumplen:

-b=impares≥3

- $\gamma < b$

- γ=conjunto de divisores de **b²**, pero no divisores de **b**. A los valores anteriores de **γ** que hay que añadir el valore de **γ=1**

Es decir, todas la t.p.p se obtienen con todos los **b** impares distintos de 1, y para cada **b** todos los **γ**, que son divisores de **b²**, pero no de **b**, a los que hay que añadir el valore de **γ**=1

Aplicando las expresiones:

$$x = \frac{b^2 + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$a = \frac{b^2 - \gamma^2}{2\gamma}$$

y dando valores se obtienen:

b=3

$\gamma=1$; x=5, a=4, Terna (5,4,3)

b=5

$\gamma=1$; x=13, a=12, Terna (13,12,5)

b=7

γ=1; x=, a=4, Terna (25,244,7)

b=9

γ=1; x=41, a=40, Terna (41,40,9)

b=11

γ=1; x=61, a=60, Terna (61,60,11)

b=13

γ=1; x=85, a=84, Terna (85,84,13)

b=15

γ=1; x=113, a=112, Terna (113,112,15)

γ=9; x=17, a=8, Terna (17,8,15)

b=17

γ=1; x=145, a=144, Terna (85,84,17)

…………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………

b=27

γ=1; x=365, a=364, Terna (365,364,27)

……………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………

CONCLUSION:

- cuando el término b = número primo ó b=número impar expresado de forma exponencial, ($b=n^p$; n,p =números enteros positivos**), solo se genera una única terna primitiva, donde γ=1**

- cuando b es producto de varios números impares diferentes, los valores de γ se obtienen calculando todos los divisores de b^2, eliminando los valores de γ que sean mayores o iguales a b, y eliminando los valores de γ que sean divisores de b, excepto el 1

Ej. b=15 (impar)

Los divisores de 15^2, son:

1,3,5,9,15,25,45,75

-Se descartan los **γ≥b** (15,25,45,75)

-Del resto (1,3,5,9), se eliminan (3,5), porque son divisores de 15

-Solo generan ternas pitagóricas primitivas los valores de:

$$\gamma = 1$$

$$\gamma = 9$$

RELACIÓN ENTRE ENTRE LOS TERMINOS (x,a, $\boldsymbol{\gamma}$)

Partiendo de las expresiones:

$$x = \frac{b^2 + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$a = \frac{b^3 - \gamma^2}{2\gamma}$$

Operando

$$2\gamma x^{3/2} = b^3 + \gamma^2$$

$$2\gamma a^{3/2} = b^3 - \gamma^2$$

Restando ambas expresiones

$$2\gamma x^{3/2} - 2\gamma a^{3/2} = 2\gamma^2$$

resulta:

$$x - a = \gamma$$

De dicha relación cabe destacar el caso particular:

$$\gamma = 1.$$

Si no existieran ternas para el valor $\gamma=1$, habría que concluir que no existirían ternas pitagóricas, ya que el valor $\gamma=1$, es común a todos los números impares que generan ternas primitivas

PROCEDIMIENTO {IV}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2 - a^2 = b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos;

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x = r + p$$

siendo **r, p**, números enteros positivos.

Elevando al cuadrado

$$(r+p)^2 = r^2 + p^2 + 2pr$$

Reordenando:

$$(r+p)^2 - r^2 = (p^2 + 2pr)$$

Para que la expresión anterior cumpla la ecuación (1), disponemos

$$x = r + p$$

$$a = r$$

$$p^2 + 2rp = b^2$$

En este caso, la obtención de las ternas pitagóricas, exige encontrar los valores de **r,p** que satisfacen

$$p^2 + 2rp = b^2$$

despejando **r**:

$$r = \frac{b^2}{2p} + \frac{p}{2}$$

$$r = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p} - p\right)$$

La condición para que **r**, sea entero positivo exige que la expresión:

$$\frac{b^2}{p} - p = par.$$

Para ello, se requiere que se cumplan las condiciones **a)** ó **b)**

a) b=impar y múltiplo de **p**
   p=impar

b) b=par y múltiplo de **p**
   p=par

Los las parejas de valores **b,p** que cumplan **a)** ó **b)**, generan valores enteros de **r**, de forma tal, que sustituyendo los pares **r,p** en la expresión:

$$(r+p)^2 - r^2 = (p^2+2pr)$$

se cumple la ecuación (1), ya que

$$p^2+2rp=b^2$$

Veamos un ejemplo:

Supongamos **p**=8;

-elegiremos para **b** un múltiplo de **p**: Sea **b**=32;

-calculamos:

$r=((32^2/8)-8)/2=60$;

$r+p=68$;

$(p^2+2rp)^{1/2}=32$;

Terna (68,60,32)

OBTENCIÓN DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS PRIMITIVAS

Las ternas primitivas pitagóricas se generan con la expresión:

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{p}-p\right)$$

-aplicando las condiciones del apartado **a)**

-p=número entero impar elevado al cuadrado (**$p=d^2$**)

-d=entero impar

Sustituyendo **p**, por **d^2**

$$r=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{d^2}-d^2\right)$$

Si **b** ha de ser múltiplo de **d**;

b=dn; n=1,3,5 ……..

sustituyendo **b** por **dn,** resulta

$$r=\frac{1}{2}(n^2-d^2)$$

n,d = números enteros impares; **n>d** ; **d** = no divisor de **n**, excepto **d**=1*

Dando valores a **n,d** en las ecuaciones:

$$r=\frac{1}{2}(n^2-d^2)$$

$$p=d^2$$

y sustituyendo en:

$$(r+p)^2 - r^2 = (p^2+2pr)$$

se generan todas las ternas pitagóricas primitivas tal como se expone a continuación.

d=1; p=1

n=1; r=0; valor no válido

n=3; r=(9−1)/2=4; r+p=5; $(p^2+2rp)^{1/2}$=3; Tern. (5,4,3)

n=5; r=(25−1)/2=12; r+p=13; $(p^2+2rp)^{1/2}$ =5; Ter. (13,12,5)

n=7; r=(49−1)/2=24; r+p=25; $(p^2+2rp)^{1/2}$ =7; Ter. (25,24,7)

n=9; r=(81−1)/2=40; r+p=41; $(p^2+2rp)^{1/2}$ =9; Ter. (41,40,9)

n=11; r=(121−1)/2=60;r+p=61;$(p^2+2rp)^{1/2}$=11;T.(61,60,11)

n=13; r=(169−1)/2=84; r+p=85; $(p^2+2rp)^{1/2}$=11;T.(85,84,13)

----

d=3; p=9

n=3; r=0; valor no válido

n=5; r=(25−9)/2=8; r+p=17; $(p^2+2rp)^{1/2}$ =15;T. (17,8,15)

n=7; r=(49−9)/2=20; r+p=29; $(p^2+2rp)^{1/2}$=21; T. (29,20,21)

n=9; r=(81−9)/2=40; r+p=36; $(p^2+2rp)^{1/2}$ =27; ~~T. (45,36,27)~~

La ~~terna (45,36,27),~~ no es primitiva ya que **n** es múltiplo de **d**

n=11; r=(121−9)/2=56;r+p=65; $(p^2+2rp)^{1/2}$=33;T. (65,56,33)

n=13;r=(1169−9)/2=80;r+p=89;$(p^2+2rp)^{1/2}$=39;T. (89,80,39)

d=5; p=25

n=5; r=0; valor no válido

n=7; r=(49−25)/2=12; r+p=37; $(p^2+2rp)^{1/2}$=35;T. (37,12,35)

n=9; r=(81−25)/2=28; r+p=53; $(p^2+2rp)^{1/2}$=45; T. (53,28,45)

n=11;r=(121−25)/2=48;r+p=73$(p^2+2rp)^{1/2}$;=55;T.(73,48,55)

n=13;r=(169−25)/2=72;r+p=97; $(p^2+2rp)^{1/2}$=65;T.(97,72,65)

n=15; r=(225−25)/2=100;r+p=125$(p^2+2rp)^{1/2}$;=75;

~~La terna(125,100,75)~~ no es primitiva ya que **n** es múltiplo de **d**

----

d=7; p=49

n=7; r=0; valor no válido

n=9; r=(81−49)/2=16;r+p=65; $(p^2+2rp)^{1/2}$=63;T.(65,16,63)

n=11;r=(121−49)/2=36;r+p=85; $(p^2+2rp)^{1/2}$=77;T.(85,36,77)

n=13;r=60;r+p=109;$(p^2+2rp)^{1/2}$=91;T.(109,60,91)

----

n=21;La terna generada no será primitiva ya que **n** es múltiplo de **d**

----

d=9; p=81

Nota: las ternas en azul, son las ternas primitivas (x,a,b) donde x< 100

*Se comprueba que la expresión

$$p^2+2rp=b^2$$

es siempre un cuadrado para cualquier valor de **n,d**

$(p^2+2pr)=d^2+2\,\frac{1}{2}(n^2-d^2)d^2=n^2d^2$

PROCEDIMIENTO {V}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2 - a^2 = b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros.

Cualquier terna pitagórica puede obtenerse resolviendo la ecuación:

$$(a+\alpha)^2 - a^2 = (a-\beta)^2;$$

con **α**, **β** números enteros

La solución de dicha ecuación es:

$$a = (\alpha + \beta) \pm \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha\beta}$$

*No todas las parejas de valores **α, β,** enteros, generan valores enteros de **a**. Para ello el radicando de la última expresión debe de ser el cuadrado de un numero entero*

$$2\alpha^2 + 2\alpha\beta = c^2;$$

c=nº entero, positivo

Despejando β

$$\beta = \frac{c^2 - 2\alpha^2}{2\alpha} = \frac{c^2}{2\alpha} - \alpha;$$

Como **β** es un numero entero, **c^2** ha de ser múltiplo de 2α;

Dando valores enteros a **c** y **α,** obtenemos **β**,

1.- Obtención de todas las ternas pitagóricas con α=1

$$\beta = \frac{c^2}{2\alpha} - \alpha = \frac{c^2}{2} - 1;$$

-c^2 ha de ser múltiplo de 2α. (en este caso múltiplo de 2)

Dando valores a c, se obtiene:

c=2; β=1; a=(1+1)$\pm\sqrt{2+2}$; En adelante, para evitar valores negativos de a$-\beta$, solo tomaremos el signo positivo de la raíz; a=(1+1)+$\sqrt{2+2}$=4

Por tanto la terna (x, a, b)= (4+1), 4, (4-1)=(5,4,3)

c=4; β=7; a=(1+7)+$\sqrt{2+14}$ =12

Por tanto la terna (x,a,b)= (13, 12, 5)

c=6; β=17; a=(1+17)+$\sqrt{2+34}$ =24

La terna (x, a, b)= (25, 24, 7)

c=8………

……………..

Así se obtendrían todas las ternas con **x>a>b**, donde **x$-$a =1**

2.- Obtención de todas las ternas pitagóricas con α=2

$$\beta=\frac{c^2}{2\alpha}-\alpha=\frac{c^2}{4}-2;$$

c^2 ha de ser múltiplo de 2α. (en este caso múltiplo de cuatro)

c=2; $\beta=-1$; Los valores de β han de ser positivos

c=4; β=2; a=(2+2)+$\sqrt{8+8}$ =8

Por tanto la terna (x,a,b)= (10, 8, 6)

c=6; β=7; a=(2+7)+$\sqrt{8+28}$ =15

La terna (x,a,b)= (17, 15, 8)

c=8……….

………………

Así se obtendrían todas las ternas con **x>a>b**, donde **x$-$a =2**

3.- Obtención de todas las ternas pitagóricas con α=3

$$\beta=\frac{c^2}{2\alpha}-\alpha=\frac{c^2}{6}-3;$$

c^2 ha de ser múltiplo de 2α. (en este caso múltiplo de seis)

c=6; β=3; a=(3+3)+$\sqrt{18+18}$ =12

Por tanto la terna (x,a,b)= (15, 12, 9)

c=12; β=21; c=(3+21)+$\sqrt{18+126}$ =36

La terna (x,a,b)= (39, 36, 15)

c=18……

……………

Así se obtendrían todas las ternas con **x>a>b**, donde **x−a =3**

……………………………………………………………………………………………..

Y de la misma forma se obtendrían todas las ternas pitagóricas **x−a =α**

Como resumen resaltar que con esta ley de formación *

$$x=a+\alpha$$

$$a=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{2\alpha^2+2\alpha\beta}$$

$$\beta=\frac{c^2}{2\alpha}-\alpha;$$

$$\alpha,\beta,c=\text{numeros enteros positivos;}$$

c^2 múltiplo de 2 α

se obtienen ternas pitagóricas primitivas y no primitivas.

*Como puede comprobarse esta ley de formación responde a la estructura común de las leyes de formación del procedimiento {II}

$$x=r+p;$$

$$a=r-p;$$

$$b=2(rp)^{1/2}$$

En efecto, si se factoriza la expresión:

$(a+\alpha)^2 - a^2=(a-\beta)^2;$

Se obtiene

$(a+\alpha+a)(a+\alpha-a)= (a-\beta)^2$

$(2a+\alpha)(\alpha)= (a-\beta)^2$

que es exactamente la condición común, donde todo número entero positivo, $(a-\beta)^2$ que cumple la igualdad (1), se expresa como el producto de dos números enteros positivos $((2a+\alpha)(\alpha)$

Así, si establecemos:

$2a+\alpha=2r$; $\alpha=2p$;

$a=r-p;$

como

$x=a+\alpha;$

Sustituyendo los valores de a, α, se obtiene

$x=r+p;$

y por tanto

$b=2\sqrt{rp}$

Esta última condición se obtiene despejando β en la expresión

$(a+\alpha)^2 - a^2=(a-\beta)^2$

$\beta=a\pm\sqrt{2a\alpha+\alpha^2}$

sustituyendo

$\alpha=2p$

$\beta=a\pm2\sqrt{rp}$

ordenando

$a-\beta=b=2\sqrt{rp}$

OBTENCIÓN DE LAS TERNAS PITAGÓRICAS PRIMITIVAS

Las ternas pitagóricas primitivas se obtienen a partir de la siguiente expresión

$$\beta=\frac{c^2}{2\alpha}-\alpha;$$

$$c^2=\text{múltiplo de } 2\alpha$$

con las siguientes combinaciones de valores de **α**, en función de su paridad

a) α=impar, β=impar, a=par

Si establecemos:

$\alpha=n^2$; n=números enteros impares (1,3,5,........2n-1)

c=2nm; m=números enteros (1,2,3,............);

y sustituimos en la expresión:

$$\beta=\frac{c^2}{2\alpha}-\alpha;$$

Resulta:

$\beta=2m^2-n^2$;

puesto que el radicando de la expresión:

$$\sqrt{2\alpha^2+2\alpha\beta}$$

debe de ser un numero entero positivo, establecemos:

$$c^2=2\alpha^2+2\alpha\beta$$

Sustituyendo en la expresión:

$$a=(\alpha+\beta)\pm\sqrt{2\alpha^2+2\alpha\beta}$$

y tomando el valor positivo de la misma, obtenemos el valor de **a**

a=α+β+c

Dando valores a **m,n** obtenemos las ternas **[(a+α), a, (a−β)]**

Formación de las ternas **[(a+α), a, (a−β)]**

n=1

m=1, α=1, β=1, c=2; a=1+1+2=4; T.(4+1),4, (4−1); T.(5,4,3)

m=2, α=1, β=7, c=4; a=1+7+4=12; Terna (13,12,5)

m=3, α=1, β=17, c=6; a=1+17+6=24; Terna (25,24,7)

m=4, α=1, β=31, c=8; a=1+31+8=40; Terna (41,40,9)

m=5, α=1, β=49, c=10; a=1+49+10=60; Terna; (61,60,11)

m=6, α=1, β=71, c=12; a=1+71+12=84; Terna; (85,84,13)

m=7, α=1, β=97, c=14; a=1+97+14=112; Terna; (113,112,15)

…………………………………………

…………………………………………

n=3

m=1, α=9; β=−7, valor no valido

m=2, α=9; β=−5, valor no valido

m=3, α=9; β=9, c=18; a=9+9+18=36; ~~Terna (45,36,27)~~

Terna no primitiva

m=4, α=9; β=23, c=24; a=56; Terna; (65,56,33)

m=5, α=9; β=41, c=30; a=80; Terna; (89,80,39)

m=6, α=9; β=63, c=36; a=; Terna; (117,108,45)

m=7, α=9; β=89, c=42; a=9+89+42=; Terna; (149,140,51)

……………………………………

……………………………………

n=5

m=1, $\alpha=25$; $\beta=-23$, valor no valido

m=2, $\alpha=25$; $\beta=-17$, valor no valido

m=3, $\alpha=25$; $\beta=-7$, valor no valido

m=4, $\alpha=25$; $\beta=7$, c=40; a=72; Terna; (97,72,65)

m=5, $\alpha=25$; $\beta=25$, c=50; a=100; Terna; ~~(125,100,75)~~

Terna no primitiva

m=6, $\alpha=25$; $\beta=47$, c=60; a=; Terna; (157,132,85)

………………………..

………………………..

b) α=par, β=impar, a=impar

Si establecemos

$\alpha=2n^2$; n=números enteros (1,2,3,4,5,……….n)

c=2nm ; m=números enteros impares(1,3,5,7,……); ($c=2\alpha m$);

$c^2= \boldsymbol{2\alpha^2 + 2\alpha\beta}$, ya que el radicando debe de ser un numero entero positivo.

Sustituyendo en:

$$\beta= \frac{c^2}{2\alpha} -\alpha$$

se obtiene:

$\beta=m^2-2n^2$;

Sustituyendo en la expresión:

$$a = (\alpha + \beta) \pm \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha\beta}$$

y tomando el valor positivo de la misma, obtenemos el valor de **a**

$a=\alpha+\beta+c$;

Dando valores a **m,n** obtenemos las ternas **[(a+α), a, (a−β)]**

Formación de las ternas **[(a+α), a, (a−β)]**

n=1;

m=1, α=2; β=−1; valor no valido

m=3, α=2; β=7, c=6; a=15; T. [(15+2), 15, (15−7)]; (17,15,8)

m=5, α=2; β=23, c=10; a=35; Terna; (37,35,12)

m=7, α=2, β=47, c=14; a=63; Terna; (65,63,49)

m=9, α=2, β=79, c=18; a=; Terna; (101,99,20)

……………………………………..

……………………………………..

n=2;

m=1, α=8; β=−7; valor no valido

m=3, α=8; β=1, c=12; a=21; T[(21+8), 21, (21−1)]; (29,21,20)

m=5, α=8; β=17, c=20; a=45; Terna; (53,45,28)

m=7, α=8, β=41, c=28; a=77; Terna; (85,77,36)

m=9, α=8, β=73, c=36; a=117; Terna; (125,117,44)

…………………………………………

…………………………………………..

n=3;

m=1, α=18; β=−17; valor no valido

m=3, α=18; β=−9; valor no válido

m=5, α=18; β=7, c=30; a=55; Terna; (73,55,48)

m=7, α=18, β=31, c=42; a=91; Terna; (109,91,60)

………………………………………..

……………………………………….

n=4;

m=1, α=32; β=−31; valor no valido

m=3, α=32; β=−22; valor no válido

m=5, α=32; β=−7, valor no valido

m=7, α=32, β=17, c=56; a=; Terna; (137,105,88)

…………………………………………..

………………………………………

n=5;

m=1, α=50; β=−49; valor no valido

m=3, α=50; β=−41; valor no válido

m=5, α=50; β=−25, valor no valido

m=7, α=50; β=−1, valor no valido

m=9, α=50, β=31, c=90; a=171; Terna; (221,171,140)

………………………………………

Nota: Las ternas en azul, son las ternas primitivas (x,a,b)donde x< 100

RESUMEN CAPITULO I

Se han establecido cinco procedimientos de formación de ternas pitagóricas primitivas.

Estas leyes de formación participan de la propiedad inherente a la ecuación (1), de transformar la diferencia de los cuadrados de dos números [$x^2 - a^2$] en el producto de la suma de ellos por su diferencia

$$[(x+a)(x-a)]$$

Cualquier otra ley de formación que se pueda obtener, contendrá necesariamente dicha propiedad.

CAPITULO 2

APLICACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS PARA LA OBTENCION DE TERNAS PITAGORICAS A LA ECUACION

$$x^3-a^3=b^3$$

¿ Es posible obtener ternas de números enteros positivos **x, a, b**, tales que cumplan la ecuación:

$$x^3-a^3=b^3 \quad (1)$$

Aplicaremos los procedimientos expuestos para la obtención de ternas pitagóricas y obtendremos algunas conclusiones.

Procedimiento {I}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^3-a^3=b^3$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Si **r,p** son números enteros positivos con **r>p**, podemos expresar **b** como el producto de dos números enteros

$$b=rp$$

$$b^3=r^3p^3$$

Si factorizamos la ecuación (1)

$$(x^{3/2}+a^{3/2})\,(x^{3/2}-a^{3/2})=b^3$$

En consecuencia se puede poner

$(x^{3/2}+a^{3/2})=r^3$

$(x^{3/2}-a^{3/2})=p^3$

Despejando $x^{3/2}$, $a^{3/2}$

$x^{3/2}=(r^3+p^3)/2$

$a^{3/2}=(r^3-p^3)/2$

elevando al cuadrado las expresiones anteriores, se obtiene

$$x^3=(r^3+p^3)^2/4$$

$$a^3=(r^3-p^3)^2/4$$

sustituyendo en la ecuación (1)

$$((r^3+p^3)^2/4)-((r^2-p^2)^2/4)=r^3p^3$$

Se obtiene la expresión

$$(r^3+p^3)^2-(r^3-p^3)^2=4\,r^3p^3$$

Si expresamos

$y^3=(r^3+p^3)^2$

$c^3=(r^3+p^3)^2$

$d^3=4r^3p^3$

y sustituimos, se obtiene

$$y^3-c^3=d^3 \quad (2)$$

cuyas ternas **(y,c,d),** en función de **r,p** son

$$y=(r^3+p^3)^{2/3}$$

$$c=(r^3-p^3)^{2/3}$$

$$d=2^{2/3}\,rp$$

Si existiesen parejas de números enteros positivos **r,p** tales que, aplicando las expresiones anteriores, generasen valores de **y,c,d** enteros positivos, no se cumpliría el teorema de Fermat para n=3

Sin embargo, si nos fijamos en el término **d**

$$d=2^{2/3}\,rp$$

Es fácil comprobar que **d** *no es entero* para cualquier par de valores de **r,p** enteros positivos.

Por tanto, no existen ternas y,c,d, de números enteros positivos, que cumplan la ecuación

$$y^3 - c^3 = d^3$$

Quedando demostrado el T. de Fermat para n=3

--

B).-A la misma conclusión se puede llegar si para obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^3 - a^3 = b^3 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

se divide ambos términos por b^3 y se factoriza

$$\frac{x^3}{b^3} - \frac{a^3}{b^3} = 1$$

$$\left(\frac{x^{3/2}}{b^{3/2}} + \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}\right)\left(\frac{x^{3/2}}{b^{3/2}} - \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}\right) = 1$$

La igualdad anterior se mantiene si expresamos:

$$\left(\frac{x^{3/2}}{b^{3/2}} + \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}\right) = \frac{r^{3/2}}{p^{3/2}}$$

$$\left(\frac{x^{3/2}}{b^{3/2}} - \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}}\right) = \frac{p^{3/2}}{r^{3/2}}$$

Donde **r,p** son números enteros positivos con $r > p$

Despejando

$$\frac{2x^{3/2}}{b^{3/2}}=\frac{r^3+p^3}{(r^{3/2})(p^{3/2})}$$

$$\frac{2a^{3/2}}{b^{3/2}}=\frac{r^3-p^3}{(r^{3/2})(p^{3/2})}$$

Pudiendo establecerse

$$x^{3/2}=r^3 + p^3$$

$$a^{3/2}=r^3-p^3$$

$$b^{3/2}=2(r^{3/2})(p^{3/2})$$

Despejando queda

$$x=(r^3+p^3)^{2/3}$$

$$a=(r^3- p^3)^{2/3}$$

$$b=2^{2/3}rp$$

Si existiesen pares de valores **r,p,** enteros positivos que, aplicados a las expresiones anteriores, generasen valores de **x,a,b**, enteros positivos, el Teorema de Fermat no se cumpliría para n=3

Sin embargo, con la expresión $b=2^{2/3}rp$, es inmediato comprobar que no es posible encontrar pares de valores r,p enteros positivos que generen valores de b enteros positivos, por tanto no existen ternas de valores enteros positivos (x,a,b), que cumplan la expresión

$$x^3-a^3=b^3 \quad (1)$$

Con lo que queda demostrado el T. de Fermat para n=3

C).- Factorizando directamente la expresión

$$x^3 - a^3 = b^3 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

$$(x^{3/2} + a^{3/2})\,(x^{3/2} - a^{3/2}) = b^3$$

Si **r** y **p** son números enteros positivos, con **r>p**, al objeto de obtener el termino **b**, entero positivo, para cualquier valor de **r,p**, podemos expresar

$(x^{3/2} + a^{3/2}) = 2^{3/2} r^3$

$(x^{3/2} - a^{3/2}) = 2^{3/2} p^3$

Despejando x, a

$2x^{3/2} = 2^{3/2}\,(r^3 + p^3)$

$2a^{3/2} = 2^{3/2}\,(r^3 - p^3)$

Se obtiene

$x = 2^{1/3}(r^3 + p^3)^{2/3}$

$a = 2^{1/3}(r^3 - p^3)^{2/3}$

$b = 2rp$

En este caso, cualquier pareja de valores **r,p** genera valores enteros de **b**, pero estos mismos pares de valores no generan valores de **x,a** enteros positivos.

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=3

Procedimiento {II}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^3-a^3=b^3 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x=r+p \qquad (2)$$

siendo **r,p,** números enteros positivos. (**r>p**)

Así mismo, todo número entero positivo puede expresarse como la diferencia de dos números enteros positivos, por lo que establecemos:

$$a=r-p \qquad (3)$$

con **r,p** números enteros positivos y **r>p**

Por tanto, todo par de números enteros positivos **x, a,** que cumpla la ecuación (1), pueden expresarse en función de **r, p,** aplicando (2) y (3).

Elevando al cubo las expresiones (2) y (3)

$$x^3=(r+p)^3=(r^3+3rp^2)+(3r^2p+p^3)$$

$$a^3=(r-p)^3=(r^3+3p^2r)-(3r^2p+p^3)$$

Si llamamos C, a la suma de los términos de orden impar en el desarrollo del binomio de Newton de la expresión $(r+p)^3$

$$C=r^3+3p^2r$$

Si llamamos D, a la suma de los términos de orden par en el desarrollo del binomio de Newton de la expresión $\mathbf{(r+p)^3}$

$$D=3r^2p+p^3$$

Sustituyendo

$$x^3 = C + D$$

$$a^3 = C - D$$

Si multiplicamos las expresiones anteriores, se obtiene

$$C^2 - D^2 = x^3 a^3$$

Si llamamos

$$E = xa;$$

Elevando al cubo y sustituyendo

$$E^3 = (r^2 - p^2)^3$$

Obteniéndose la expresión

$$C^2 - D^2 = E^3$$

Donde C ,D, E son enteros positivos ya que **r,p**, son enteros positivos.

Para que de la expresión anterior podamos obtener todas las ternas que puedan cumplir la ecuación (1), (ternas n=3), se tendrá que cumplir que:

$$C^2 = F^3$$

$$D^2 = G^3$$

Donde F, G, son números enteros positivos.

Sustituyendo

$$\mathbf{F^3 - G^3 = E^3 \quad (I)\ ;}$$

Sustituyendo E por su valor en función de **r,p**

$$\mathbf{F^3 - G^3 = (r^2 - p^2)^3 \quad (i)\ ;}$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat para n=3 conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de las expresiones

$$F=(r^3+3p^2r)^{2/3}$$

$$G=(p^3+3r^2p)^{2/3}$$

generen valores de F, y G enteros positivos.

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=3

Si restamos las expresiones

$$x^3=C+D$$

$$a^3=C-D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^3-a^3=2D\ \ (II)}$$

Sustituyendo $\mathbf{x^3}$ y $\mathbf{a^3}$, por sus valores en función de **r,p**

$$\mathbf{(r+p)^3-(r-p)^3=2D\ (ii)}$$

Para que de la expresión anterior podamos obtener todas las ternas que puedan cumplir la ecuación (1), (ternas n=3), se tendrá que cumplir que:

$$2D=\ b^3 \quad (b=\text{entero positivo})$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat para n=3 conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de la expresión

$$2(p^3+3r^2p)=b^3$$

generen valores enteros de **b**

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=3

Si sumamos las expresiones

$$x^3=C+D$$

$$a^3=C-D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^3+a^3=2C\ (III)}$$

Sustituyendo $\mathbf{x^3}$ $\mathbf{a^3}$, por sus valores en función de **r,p**

$$\mathbf{(r+p)^3 + (r-p)^3=2C\ (iii)}$$

Para que de la expresión anterior podamos obtener todas las ternas que puedan cumplir la ecuación (1), (ternas n=3), es necesario que

$$2C=c^3 \quad (c=\text{ número entero positivo })$$

Sustituyendo

$$2(r^3+3p^2r)=c^3$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat para n=3 conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de la expresión

$$2(p^3+3r^2p)=c^3$$

generen valores enteros de **c**

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=3

Análisis conjunto de las ecuaciones obtenidas.

Ecuación (I)

$$F^3 - G^3 = (r^2 - p^2)^3 \quad (I)$$

-para que de la ecuación (I) puedan extraerse todas las ternas que cumplen la ecuación (1), se ha de cumplir

$F=(C)^{2/3}$; F número entero positivo

$G=(D)^{2/3}$;G número enteros positivo

Ecuación (II)

$$(r+p)^3 - (r-p)^3 = 2D \quad (II)$$

-para que de la ecuación (II) puedan extraerse todas las ternas que satisfazgan la ecuación (1), se ha de cumplir

$2D=b^3$, b= entero positivo

Ecuación (III)

$$(r+p)^3 + (r-p)^3 = 2C \quad (III)$$

- para que de la ecuación (III) puedan extraerse todas las ternas que satisfazgan la ecuación (1), se ha de cumplir

$2C=c^3$; c= entero positivo

Ecuaciones (I) y (II)

De la comparación de ambas ecuaciones, se desprende

-respecto de la ecuación (I), como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), se exige que F y G=números enteros positivos, con

$$F=(C)^{2/3}$$

$$G=(D)^{2/3}$$

-respecto de la ecuación (II), como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), se exige que D=número entero positivo b, elevado al cubo y dividido por dos

$$D=b^3/2$$

Supongamos que es posible encontrar parejas de valores **r,p** tales que generen valores enteros de F y G. Es decir, dichos pares de valores **r,p** cumplen la ecuación

$$\mathbf{F^3-G^3=(r^2-p^2)^3 \quad (I)}$$

Si G es entero

$$D=(G)^{3/2}$$

De otra parte, la ecuación

$$\mathbf{(r+p)^3-(r-p)^3=2D=b^3 \quad (II)}$$

como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), exige que:

$$D=b^3/2;$$

Si igualamos el término D en ambas ecuaciones

$$(G)^{3/2}=b^3/2$$

despejando **b**

$$b=2^{1/3}G^{1/2}$$

donde para valores de G enteros no se obtiene ningún valor de **b** entero. Es decir la ecuación (II) no genera ternas que cumplen la ecuación (I) para valores de G enteros

Supongamos ahora que es posible encontrar valores r,p tales que generen valores enteros de b, es decir dichos pares de valores cumplen la ecuación

$$\mathbf{(r+p)^3-(r-p)^3 = 2D \quad (II)}$$

Si b es entero,

$$D=b^3/2$$

Por otra parte la ecuación

$$\mathbf{F^3-G^3= (r^2- p^2)^3 \quad (I)}$$

como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), exige que:

$$D=(G)^{3/2}$$

Si igualamos el término D en ambas expresiones

$$(G)^{3/2}= b^3/2$$

despejando G

$$G=b^2/2^{2/3}$$

donde para valores de b enteros no se obtiene ningún valor de G entero. Es decir la ecuación (I) no genera ternas que cumplen la ecuación(1) para valores de **b** enteros

La solución que hace compatible las dos posibilidades anteriores es que no es factible encontrar pares de valores r,p enteros que generen valores de G y b enteros, con lo que se cumpliría el T. de Fermat para n=3.

Ecuaciones (I) y (III)

De la misma forma siguiendo el razonamiento anteriormente expuesto, de la comparación de las dos ecuaciones se obtiene la relación

$$(F)^{3/2}= c^3/2$$

despejando **c**

$$c=2^{1/3}F^{1/2}$$

donde para valores de F enteros no se obtiene ningún valor de **c** entero. Es decir la ecuación (III) no genera ternas n=3 para valores de F enteros

despejando F

$$F=c^2/2^{2/3}$$

donde para valores de **c** enteros no se obtiene ningún valor de F entero. Es decir la ecuación (I) no genera ternas n=3 para valores de **c** enteros

La solución que hace compatible las dos posibilidades anteriores es que no es factible encontrar pares de valores r,p enteros que generen valores de F y c enteros, con lo que se cumpliría lo expresado en el T. de Fermat para n=3.

Como resumen, las ecuaciones

$$\mathbf{F^3 - G^3 = (r^2 - p^2)^3 \quad (I)}$$

$$\mathbf{(r+p)^3 - (r-p)^3 = 2D = b^3 \quad (II)}$$

$$\mathbf{(r+p)^3 + (r-p)^3 = 2C = c^3 \quad (III)}$$

no generan ternas de números enteros que cumplen la ecuación

$$x^3 - a^3 = b^3 \quad (1)$$

es decir no existen, pares de números enteros positivos **r,p** que generen valores enteros de **F,G,b,c,** con lo que no existen **ternas x,a,b** enteros positivos que cumplan la ecuación (1)

Procedimiento {III}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^3 - a^3 = b^3 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros.

Si **n**, es un número entero positivo, al igual que con las ternas pitagóricas, sería posible asociar a dicho número **n**, las ternas **(x,a,b)** que se corresponderían con las siguientes expresiones:

$[\, n^3+i^3, n^3-i^3, (6n^6i^3+2i^9)^{1/3} \,]$

Donde:

Si i=par, i, toma valores 1,3,5,7,...............n−1

Si i=impar, i, toma valores 2,4,6,8,...........n−1

Si se establece

$$x=(n^3+i^3)$$

$$a=(n^3-i^{3)})$$

$$b=(6n^6i^3+2i^9)^{1/3}$$

y se sustituye en la ecuación (1)

$$(n^3+i^3)^3-(n^3-i^{3)})^3= (6n^6i^3+2i^9)$$

En este procedimiento se han dispuesto las incógnitas **n, i** de forma que asociarían las ternas primitivas a números **n** enteros positivos.

Sin embargo no existen pares de valores **n,i,** que generen valores de **b** enteros positivos

$$b=(6n^6i^3+2i^9)^{1/3}$$

$$b^3=i^3(6n^6+2i^6)$$

Para ello se requiere que el término $(6n^6+2i^6)$

sea un numero entero **c**, elevado al cubo

$$(6n^6+2i^6)=c^3$$

En este caso, demostrar el teorema de Fermat para n=3, supone demostrar que no es posible encontrar parejas de valores **n,i** que en aplicación de la expresión anterior generen valores de **c**, enteros.

Probar lo anteriormente expuesto, constituye un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=3.

B.-En concordancia con lo anterior, se tratará de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2-a^2=b^3 \quad (2)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos, asociando dichas ternas al termino b.

Para ello factorizamos la ecuación (1)

$$(x+a)\,(x-a)=b^3$$

podemos expresar:

$$(x+a)=(b^3)/\gamma$$

$$(x-a)=\gamma$$

donde **γ**=todos los divisores de **b³**, que generan valores enteros positivos de **x,a.**

Despejando x, a, se obtiene:

$$x=\frac{b^3+\gamma^2}{2\gamma}$$

$$a=\frac{b^3-\gamma^2}{2\gamma}$$

Pudiendo asociar al término **b**, todas las ternas posibles, donde, en función de la paridad de **b**, se establecen las siguientes condiciones:

Si b es impar:

-se incluye como divisor el 1, y se descartan los valores donde $\boldsymbol{\gamma^2 \geq b^3}$

Si b es par:

-se descartan los valores donde $\boldsymbol{\gamma^2 \geq b^3}$

-si establecemos $\boldsymbol{b=\gamma\delta}$, donde $\boldsymbol{\gamma,\delta}$=enteros positivos, se descartaran los valores de $\boldsymbol{\gamma}$, donde en el producto $\boldsymbol{\gamma\delta}$, uno de los dos factores es impar

Ej1. b=15 (impar)

Los divisores de 15^3, son:

1,3,5,9,15,25,27,45,75,125,135,225,375,675,1125,3375

Se descartan los $\boldsymbol{\gamma^2 \geq b^3}$ (75,125,135,225,375,675,1125,3375) y se obtienen todas las ternas **(x,a,15),** que cumplen la ecuación (2), o lo que es lo mismo, se obtienen todas las ternas asociadas al termino **b=15**

γ=1

$$x = \frac{15^3 + 1^2}{2}$$

$$a = \frac{15^3 - 1^2}{2}$$

Terna (1688,1687,15)

γ=3

$$x = \frac{15^3 + 3^2}{6}$$

$$a = \frac{15^3 - 3^2}{6}$$

Terna (564,561,15)

γ=5

$$x = \frac{15^3 + 5^2}{10}$$

$$a = \frac{15^3 - 5^2}{10}$$

Terna (340,335,15)

γ=9

$$x = \frac{15^3 + 9^2}{18}$$

$$a = \frac{15^3 - 9^2}{18}$$

Terna (192,183,15)

γ=15

$$x = \frac{15^3 + 15^2}{30}$$

$$a = \frac{15^3 - 15^2}{30}$$

Terna (120,105,15)

γ=25

$$x = \frac{15^3 + 25^2}{50}$$

$$a = \frac{15^3 - 25^2}{50}$$

Terna (80,55,15)

γ=27

$$x = \frac{15^3 + 27^2}{54}$$

$$a = \frac{15^3 - 27^2}{54}$$

Terna (76,49,15)

γ=45

$$x = \frac{15^3 + 45^2}{90}$$

$$a = \frac{15^3 – 45^2}{90}$$

Terna (60,15,15)

Ej2. b=6 (par)

Los divisores de 6^3 , son:

1,2,3,4,6,8,9,12,18, 24,27,36,54,72,108,216

Se descartan los **$\gamma^2 \geq b^3$** (18,24,27,36,54,72,108,216), y también aquellos donde un factor es impar en los siguientes productos:

~~(1)(216)~~

(2)(108)

~~(3)(72)~~

(4)(54)

(6)(36)

~~(8)(27)~~

~~(9)(24)~~

(12)(18)

Quedando por tanto:

γ=2

$$x = \frac{6^3 + 2^2}{4}$$

$$a = \frac{6^3 - 2^2}{4}$$

Terna (55,53,6)

γ=4

$$x = \frac{6^3 + 4^2}{8}$$

$$a = \frac{6^3 - 4^2}{8}$$

Terna (29,25,6)

γ=6

$$x = \frac{6^3 + 6^2}{12}$$

$$a = \frac{6^3 - 6^2}{12}$$

Terna (21,15,6)

γ=12

$$x = \frac{6^3 + 12^2}{24}$$

$$a = \frac{6^3 - 12^2}{24}$$

Terna (15,3,6)

De esta forma se obtienen todas las ternas **(x,a,6),** que cumplen la ecuación (2), o lo que es lo mismo, se obtienen todas las ternas asociadas al término **b= 6**

Como cualquier número entero positivo **b**, tiene uno o más divisores de su misma paridad, siempre es posible encontrar ternas (x,a,b) que cumplan la ecuación

$$x^2 - a^2 = b^3 \quad (2)$$

Por tanto, cualquier número b, entero positivo, elevado al cubo, puede expresarse como la diferencia de los cuadrados de dos números enteros positivos x,a

C) ¿es posible encontrar ternas (x,a,b), de números enteros positivos, que cumplan la ecuación?

$$x^3 - a^3 = b^3$$

utilizando las expresiones:

$$x^{3/2} = \frac{b^3 + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$x^{3/2} = \frac{b^3 - \gamma^2}{2\gamma}$$

Si b es impar:

-se incluye como divisor el 1, y se descartan los valores donde $\gamma^2 \geq b^3$

Si b es par:

-se descartan los valores donde $\gamma^2 \geq b^3$

-si establecemos $b=\gamma\delta$, donde γ,δ=enteros positivos, se descartaran los valores de γ, donde en el producto $\gamma\delta$, uno de los dos factores es impar

Elevando al cuadrado **$x^{3/2}$,$a^{3/2}$**, se obtiene:

$$\left(\frac{b^3+\gamma^2}{2\gamma}\right)^2 - \left(\frac{b^3-\gamma^2}{2\gamma}\right)^2 = b^3$$

$$x^3 = \left(\frac{b^3+\gamma^2}{2\gamma}\right)^2$$

$$a^3 = \left(\frac{b^3-\gamma^2}{2\gamma}\right)^2$$

En este caso, para demostrar el T. de Fermat (n=3), bastará con demostrar, que no pueden obtenerse pares de valores x,a, enteros positivos, para valores enteros de b, aplicando las siguientes expresiones:

$$b^6+\gamma^4+2\gamma^2b^3=4\gamma^2x^3$$

$$b^6+\gamma^4-2\gamma^2b^3=4\gamma^2a^3$$

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el T. de Fermat para n=3

También se puede demostrar el teorema, partiendo de las expresiones:

$$x^{3/2} = \frac{b^3+\gamma^2}{2\gamma}$$

$$a^{3/2} = \frac{b^3-\gamma^2}{2\gamma}$$

Operando

$2\gamma x^{3/2}=b^3+\gamma^2$

$2\gamma a^{3/2}=b^3-\gamma^2$

Restando ambas expresiones

$2\gamma x^{3/2}-2\gamma a^{3/2}=2\gamma^2$

resulta:

$$x^{3/2}-a^{3/2}=\gamma$$

En la expresión anterior, el valor ***γ=1****, está asociado a todos los valores de* ***b*** *enteros positivos capaces de generar pares de valores* ***x,a****, que cumplan la ecuación (1), ya que el 1 es divisor de cualquier número entero* ***b****.*

De forma, que si no existieran valores enteros de ***x,a****, que cumplan*

$$x^{3/2}-a^{3/2}=1$$

se cumpliría el T. de Fermat para n=3

En este caso, demostrar el T. de Fermat, consiste en demostrar que no existen valores enteros positivos de **x,a** que cumplan la ecuación

$$x^{3/2}-a^{3/2}=1$$

La demostración es inmediata.

Cualquier par de valores x,a enteros positivos al elevarlos a una potencia mayor que 1, genera diferencias, mayores que la unidad. En nuestro caso si **x,a** fuesen enteros positivos se produciría que:

$$x^{3/2}-a^{3/2}>1^{*}$$

Por tanto, el cumplimiento de la ecuación

$$x^{3/2}-a^{3/2}=1$$

exige que al menos **x,** ó **a**, no sean enteros

Quedando demostrado el T. de Fermat para n=3

A su vez la pareja de valores x,a, cuando **b** es entero, para el valor **γ=1,** exige el cumplimiento de:

$$x^{3/2}=\frac{b^3+1}{2}$$

$$a^{3/2}=\frac{b^3-1}{2}$$

expresiones, que para valores de **b** enteros, generan valores irracionales de x,a.**

*La diferencia más próxima a la unidad en la ecuación $x^{3/2}-a^{3/2}=1$**,**se produce cuando **x,a** son consecutivos y toman los menores valores posibles, y esta diferencia siempre es mayor que 1

**Las formulas

$$x^{3/2} = (\frac{b^3 + 1}{2})$$

$$a^{3/2} = (\frac{b^3 - 1}{2})$$

son expresiones generadoras de números irracionales x,a para valores de b enteros positivos. La máxima diferencia **x−a**, se produce cuando b=1, lo que implica a=0(solución trivial). Para valores mayores de b (2,3,4 …), la diferencia **x−a<1,** lo que implica de nuevo que o bien **x**, o bien **a** no sean enteros(en este caso ambos son irracionales). Quedando demostrado igualmente el T. de Fermat

Procedimiento {IV}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^3= a^3+ b^3 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos;

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x=r+p \qquad (2)$$

siendo **r, p**, números enteros positivos. **r>p**

Elevando al cuadrado y reordenando:

$$(r+p)^3=r^3+3p^2r+3r^2p+p^3$$

$$(r+p)^3- r^3=3p^2r+3r^2p+p^3$$

Para la obtención de las ternas que cumpliesen la ecuación (1), tendremos, que encontrar que valores de **r,p** satisfacen

$$3p^2r+3r^2p+p^3=c^3$$

c=entero positivo

Si no es posible encontrar dichos valores, se cumplirá el teorema de Fermat para n=3

Por tanto, la demostración de la veracidad del teorema de Fermat para n=3, supone demostrar que no existen pares de valores r,p, enteros positivos tales que en aplicación de la expresión anterior generen valores de c enteros, positivos

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=3

Procedimiento {V}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^3 - a^3 = b^3 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros.

Cualquier terna, que cumpla la ecuación (1) puede obtenerse resolviendo la ecuación:

$$(a+\alpha)^3 - a^3 = (a-\beta)^3; \qquad (2)$$

con α, β números enteros ; $a>\beta$

Por tanto, la demostración de la veracidad del teorema de Fermat para n=3, supone demostrar que no existen pares de valores a,α,β enteros positivos tales que cumplan la ecuación (2)

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=3

RESUMEN CAPITULO II

Se han aplicado a la ecuación $x^3-a^3=b^3$, los procedimientos de formación de ternas pitagóricas primitivas

De su aplicación, en unos casos, se han obtenido algunas conclusiones que permiten afirmar el cumplimiento del T. de Fermat para la ecuación $x^3-a^3=b^3$, y en otros casos, simplemente se ha indicado un camino o una vía para demostrar el T. de Fermat, para el supuesto $n=3$

CAPITULO 3

APLICACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS PARA LA OBTENCION DE TERNAS PITAGORICAS A LA ECUACION

$$x^4 - a^x = b^4$$

¿ Es posible obtener ternas de números enteros positivos **x, a, b**, tales que cumplan la ecuación:

$$x^4 - a^4 = b^4 \quad (1)$$

Aplicaremos los procedimientos expuestos para la obtención de ternas pitagóricas y obtendremos algunas conclusiones.

Procedimiento {I}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^4 - a^4 = b^4$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Si **r,p** son números enteros positivos con **r>p**, podemos expresar **b** como el producto de dos números enteros

$$b = rp$$

$$b^4 = r^4 p^4$$

Si factorizamos la ecuación (1)

$$(x^{4/2} + a^{4/2})\,(x^{4/2} - a^{4/2}) = b^4$$

En consecuencia se puede poner

$(x^{4/2} + a^{4/2}) = r^4$

$(x^{4/2} - a^{4/2}) = p^4$

Despejando $x^{4/2}$, $a^{4/2}$

$x^{4/2} = (r^4 + p^4)/2$

$a^{4/2} = (r^4 - p^4)/2$

elevando al cuadrado las expresiones anteriores, se obtiene

$$x^4=(r^4+p^4)^2/4$$

$$a^4=(r^4-p^4)^2/4$$

sustituyendo en la ecuación (1)

$$((r^4+p^4)^2/4)-((r^4-p^4)^2/4)= r^4p^4$$

Se obtiene la expresión

$$(r^4+p^4)^2-(r^4-p^4)^2=4\ r^4p^4$$

Si expresamos

$y^4= (r^4+p^4)^2$

$c^4=(r^4+p^4)^2$

$d^4=4r^4p^4$

y sustituimos, se obtiene

$$y^4-c^4=d^4 \quad (2)$$

cuyas ternas **(y,c,d),** en función de **r,p** son

$$y=(r^4+p^4)^{2/4}$$

$$c=(r^4-p^4)^{2/4}$$

$$b=2^{2/4}\ rp$$

Si existiesen parejas de números enteros positivos **r,p** tales que, aplicando las expresiones anteriores, generasen valores de **y,c,d** enteros positivos, no se cumplirá el teorema de Fermat para n=4

Sin embargo, si nos fijamos en el término **d**

$$d=2^{2/4}\ rp$$

es fácil comprobar que **d** *no es entero* para cualquier par de valores de **r,p** enteros positivos.

Por tanto, no se pueden obtener ternas (y,c,d) enteros positivos, que cumplan la ecuación

$$y^4 - c^4 = d^4$$

Quedando demostrado el T. de Fermat para n=4

B).-A la misma conclusión se puede llegar si para obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^4 - a^4 = b^4 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

se divide ambos términos por $\mathbf{b^4}$ y se factoriza

$$\frac{x^4}{b^4} - \frac{a^4}{b^4} = 1$$

$$\left(\frac{x^{4/2}}{b^{4/2}} + \frac{a^{4/2}}{b^{4/2}}\right)\left(\frac{x^{4/2}}{b^{4/2}} - \frac{a^{4/2}}{b^{4/2}}\right) = 1$$

La igualdad anterior se mantiene si expresamos:

$$\left(\frac{x^{4/2}}{b^{4/2}} + \frac{a^{4/2}}{b^{4/2}}\right) = \frac{r^{4/2}}{p^{4/2}}$$

$$\left(\frac{x^{4/2}}{b^{4/2}} - \frac{a^{4/2}}{b^{4/2}}\right) = \frac{p^{4/2}}{r^{4/2}}$$

Donde **r,p** son números enteros positivos con **r>p**

Despejando

$$\frac{2x^{4/2}}{b^{4/2}} = \frac{r^4 + p^4}{(r^{4/2})(p^{4/2})}$$

$$\frac{2a^{4/2}}{b^{4/2}} = \frac{r^4 - p^4}{(r^{4/2})(p^{4/2})}$$

Pudiendo establecerse

$$x^{4/2}=r^4 + p^4$$

$$a^{4/2}=r^4-p^4$$

$$b^{4/2}=2(r^{4/2})(p^{4/2})$$

Despejando queda

$$x=(r^4+p^4)^{2/4}$$

$$a=(r^4- p^4)^{2/4}$$

$$b=2^{2/4}rp$$

Si existiesen pares de valores **r,p,** enteros positivos que, aplicados a las expresiones anteriores, generarasen valores de **x,a,b**, enteros positivos, el Teorema de Fermat no se cumpliría para n=4

Sin embargo, con la expresión $b=2^{2/4}rp$, es inmediato comprobar que no es posible encontrar pares de valores de r,p enteros positivos que generen valores de b enteros positivos, por tanto no existen ternas de valores enteros positivos de (x,a,b), que cumplan la expresión

$$\mathbf{x^4-a^4=b^4 \quad (1)}$$

Con lo que queda demostrado el T. de Fermat para n=4

C) Factorizando directamente la expresión

$$x^4-a^4=b^4 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

$$(x^{4/2} +a^{4/2}) (x^{4/2}-a^{4/2})=b^4$$

Si **r** y **p** son números enteros positivos, al objeto de obtener el termino **b**, entero positivo, para cualquier valor de **r,p**, podemos expresar:

$(x^{4/2} + a^{4/2})=2^{4/2}r^4$

$(x^{4/2} - a^{4/2})=2^{4/2}p^4$

Despejando x, a

$2x^{4/2}=2^{4/2}(r^4 + p^4)$

$2x^{4/2}=2^{4/2}(r^4 - p^4)$

Se obtiene

$x=2^{2/4}(r^4 + p^4)^{2/4}$

$a=2^{2/4}(r^4 - p^4)^{2/4}$

$b=2rp$

En este caso, cualquier pareja de valores **r,p** genera valores enteros de **b**, pero estos mismos pares de valores no generan valores de **x,a** enteros positivos.

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=4

Procedimiento {II}

Supuesto n=4

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^4 - a^4 = b^4 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x = r + p \qquad (2)$$

siendo **r,p,** números enteros positivos. **(r>p)**

Así mismo, todo número entero positivo puede expresarse como la diferencia de dos números enteros positivos, por lo que establecemos:

$$a = r - p \qquad (3)$$

con **r,p** números enteros positivos y **r>p**

Por tanto, todo par de números enteros positivos **x, a,** que cumpla la ecuación (1), pueden expresarse en función de **r, p,** aplicando (2) y (3).

Elevando a la cuarta potencia las expresiones (2) y (3)

$$x^4 = (r+p)^4 = (r^4 + 6r^2p^2 + p^4) + (4r^3 p + 4p^3r)$$

$$a^4 = (r-p)^4 = (r^4 + 6r^2p^2 + p^4) - (4r^3 p + 4p^3r)$$

Si llamamos C, a la suma de los términos de orden impar en el desarrollo del binomio de Newton de la expresión **(r+p)⁴**

$$C = r^4 + 6r^2p^2 + p^4$$

Si llamamos D, a la suma de los términos de orden par en el desarrollo del binomio de Newton de la expresión **(r+p)⁴**

$$D = 4r^3 p + 4p^3r$$

Sustituyendo

$$x^4=C+D$$

$$a^4=C-D$$

Si multiplicamos las expresiones anteriores, se obtiene

$$C^2-D^2= x^4a^4$$

Si llamamos

$$E=xa;$$

Elevando a la cuarta potencia y sustituyendo

$$E^4 =(r^2- p^2)^4$$

Obteniéndose la expresión

$$C^2-D^2= E^4$$

Donde C ,D, E son enteros positivos ya que **r,p**, son enteros positivos.

Para que de la expresión podamos obtener todas las ternas de la ecuación (1), (ternas n=4), se tendrá que cumplir que

$$C^2=F^4$$

$$D^2=G^4$$

Donde F, G, son números enteros positivos.

Sustituyendo

$$\mathbf{F^4-G^4= E^4 \quad (I) ;}$$

Sustituyendo E por su valor en función de **rp**

$$\mathbf{F^4-G^4 =(r^2- p^2)^4 \quad (i) ;}$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat para **n**=4 conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de las expresiones

$$F=(r^4+6r^2p^2+p^4)^{2/4}$$

$$G=(4r^3 p+4p^3r)^{2/4}$$

generen valores de F, y G enteros positivos.

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=4

Si restamos las expresiones

$$x^4=C+D$$

$$a^4=C-D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^4-a^4=2D\ \ (II)}$$

Sustituyendo $\mathbf{x^4}$ y $\mathbf{a^4}$, por sus valores en función de **r,p**

$$\mathbf{(r+p)^4-(r-p)^4=2D\ (ii)}$$

Para que de la expresión anterior podamos obtener todas las ternas de la ecuación (1), (ternas n=4), se tendrá que cumplir que

$$2D=\ b^4 \quad (b=\text{entero positivo})$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat para **n**=4 conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de la expresión

$$2(4r^3\,p+4p^3r)=b^4$$

generen valores enteros de **b**

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=4

Si sumamos las expresiones

$$x^4=C+D$$

$$a^4=C-D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^4+a^4=2C\ (III)}$$

Sustituyendo $\mathbf{x^4}$ $\mathbf{a^4}$, por sus valores en función de **r,p**

$$\mathbf{(r+p)^4+(r-p)^4=2C\ (iii)}$$

Para que de la expresión anterior podamos obtener todas las ternas que puedan cumplir la ecuación (1), (ternas n=4), se tendrá que cumplir

$$2C=c^4 \quad (c= \text{número entero positivo})$$

$$2(r^4+6r^2p^2+p^4)=c^4$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat para n=4 conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de la expresión

$$2(r^4+6r^2p^2+p^4)=c^4$$

generen valores enteros de **c**

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=4

Análisis conjunto de las ecuaciones obtenidas.

Ecuación (I)

$$\mathbf{F^4-G^4=(r^2-p^2)^4 \quad (I)}$$

-para que de la ecuación (I) puedan extraerse todas las ternas que cumplan la ecuación(1), se ha de cumplir

$$F=(C)^{2/4}; \text{ F número entero positivo}$$

$$G=(D)^{2/4}; \text{G número enteros positivo}$$

Ecuación (II)

$$\mathbf{(r+p)^4-(r-p)^4=2D \quad (II)}$$

-para que de la ecuación (II) puedan extraerse todas las ternas que cumplan la ecuación(1), se ha de cumplir

$$2D=b^4, \text{ b= entero positivo}$$

Ecuación (III)

$$(r+p)^4 + (r-p)^4 = 2C \quad (III)$$

- para que de la ecuación (III) puedan extraerse todas las ternas que satisfacen la ecuación(1), se ha de cumplir

$$2C=c^4;\ c= \text{entero positivo}$$

Ecuaciones (I) y (II)

De la comparación de ambas ecuaciones, se desprende

-respecto de la ecuación (I), como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), se exige que F y G=números enteros positivos, con

$$F=(C)^{2/4}$$

$$G=(D)^{2/4}$$

-respecto de la ecuación (II), como generadora de ternas que cumplen la ecuación (I), se exige que D=número entero positivo **b**, elevado a la cuarta potencia y dividido por 2

$$D=b^4/2$$

Supongamos que es posible encontrar parejas de valores **r,p** tales que generen valores enteros de F y G. Es decir, dichos pares de valores **r,p** cumplen la ecuación

$$F^4-G^4= (r^2- p^2)^4 \quad (I)$$

Si G es entero

$$D=(G)^{4/2}$$

De otra parte, la ecuación

$$(r+p)^4-(r-p)^4 = 2D=b^4 \quad (II)$$

como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), exige que:

$$D=b^4/2;$$

Si igualamos el término D en ambas ecuaciones

$$(G)^{4/2} = b^4/2$$

despejando **b**

$$b = 2^{1/4} G^{1/2}$$

donde para valores de G enteros no se obtiene ningún valor de **b** entero. Es decir, la ecuación (II) no genera ternas que cumplen la ecuación (I) para valores de G enteros

Supongamos ahora que es posible encontrar valores **r,p** tales que generen valores enteros de **b**, es decir dichos pares de valores cumplen la ecuación

$$\mathbf{(r+p)^4 - (r-p)^4 = 2D \quad (II)}$$

Si **b** es entero,

$$D = b^4/2$$

La ecuación

$$\mathbf{F^4 - G^4 = (r^2 - p^2)^4 \quad (I)}$$

como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), exige que:

$$D = (G)^{4/2}$$

Si igualamos el término D en ambas expresiones

$$(G)^{4/2} = b^4/2$$

despejando G

$$G = b^2/2^{2/4}$$

donde para valores de **b** enteros no se obtiene ningún valor de G entero. Es decir, la ecuación (I) no genera ternas que cumplen la ecuación(1) para valores de **b** enteros

La solución que hace compatible las dos posibilidades anteriores es que no es posible encontrar pares de valores r,p enteros que generen valores de G y b enteros, con lo que se cumpliría el T. de Fermat para n=4.

Ecuaciones (I) y (III)

De la misma forma siguiendo el razonamiento anteriormente expuesto, de la comparación de las dos ecuaciones se obtiene la relación

$$(F)^{4/2}= c^4/2$$

despejando **c**

$$c=2^{1/4}F^{1/2}$$

donde para valores de **F** enteros no se obtiene ningún valor de **c** entero. Es decir, la ecuación (III) no genera ternas **n**=4 para valores de **F** enteros

despejando F

$$F=c^2/2^{2/4}$$

donde para valores de **c** enteros no se obtiene ningún valor de F entero. Es decir, la ecuación (I) no genera ternas n=4 para valores de **c** enteros

La solución que hace compatible las dos posibilidades anteriores es que no es posible encontrar pares de valores r,p enteros que generen valores de F y c enteros, con lo que se cumpliría el T. de Fermat para n=4.

<u>Como resumen, las ecuaciones</u>

$$\mathbf{F^4-G^4= (r^2- p^2)^4 \quad (I)}$$

$$\mathbf{(r+p)^4-(r-p)^4 =2D=b^4 \quad (II)}$$

$$\mathbf{(r+p)^4 + (r-p)^4 =2C=c^4 \quad (III)}$$

<u>no generan ternas de números enteros que cumplen la ecuación</u>

$$x^4-a^4=b^4 \quad (1)$$

<u>Es decir no existen pares de números enteros positivos **r,p** que generen valores enteros de F,G,b,c, con lo que no existen ternas **x,a,b** enteros positivos que cumplan la ecuación (1)</u>

Procedimiento {III}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^4 - a^4 = b^4 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros.

Si **n**, es un número entero positivo, al igual que con las ternas pitagóricas, sería posible asociar a dicho número **n**, las ternas **(x,a,b)** que se corresponderían con las siguientes expresiones:

$[\ n^4+i^4,\ n^4-i^4, (8n^{12}i^4+8n^4i^{12})^{1/4}\ ]$

Donde:

Si i=par, i, toma valores 1,3,5,7,................n−1

Si i=impar, i, toma valores 2,4,6,8,............n−1

Si se establece

$$x=(n^4+i^4)$$

$$a=(n^4-i^4)$$

$$b=(8n^{12}i^4+8n^4i^{12})^{1/4}$$

y se sustituye en la ecuación (1)

$$(n^4+i^4)^4-(n^4-i^4)^4=(8n^{12}i^4+8n^4i^{12})$$

En este procedimiento se han dispuesto las incógnitas **n, i** de forma que asociarían las ternas primitivas a números n enteros positivos.

Sin embargo no existen pares de valores **n,i,** que generen valores de **b** enteros positivos

$$b=(8n^{12}i^4+8n^4i^{12})^{1/4}$$

$$b^4=i^4\, n^4(8n^8+8i^8)$$

Para ello se requiere que el término $8n^8+8i^8$

sea un numero entero **c**, elevado a la cuarta potencia

$$(8n^8+8i^8)=c^4$$

En este caso, demostrar el teorema de Fermat para n=4, supone demostrar que no es posible encontrar parejas de valores **n,i** que en aplicación de la expresión anterior generen valores de **c**, enteros.

Probar lo anteriormente expuesto, constituye un camino para demostrar el Teorema de Fermat para n=4.

B).-En concordancia con el planteamiento anterior, se tratará de obtener ternas de valores **x,a,b** tales que cumplan la expresión:

$$x^2 - a^2 = b^4 \quad (2)$$

Para ello factorizamos la ecuación (1)

$$(x+a)\ (x-a) = b^3$$

Podemos expresar

$$(x+a) = b^3/\gamma$$

$$(x-a) = \gamma$$

donde **γ**=todos los divisores de **b^4**, que generan valores enteros positivos de **x,a.**

Despejando se obtiene:

$$x = \frac{b^4 + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$a = \frac{b^4 - \gamma^2}{2\gamma}$$

Pudiendo asociar al término b, todas las ternas posibles, donde, en función de la paridad de b, se establecen las siguientes condiciones:

Si b es impar:

-se incluye como divisor el 1, y se descartan los valores donde **$\gamma^2 \geq b^4$**

Si b es par:

-se descartan los valores donde **$\gamma^2 \geq b^4$**

-si establecemos **b=γδ**, donde **γ,δ**=enteros positivos, se descartan los valores de **γ**, donde en el producto **γδ**, uno de los dos factores es impar

Ej1. b=7 (impar)

Los divisores de 7^4, son:

1,7,49,343

Se descartan los $\gamma^2 \geq b^4$ (49,343) y se obtienen todas las ternas **(x,a,7),** que cumplen la ecuación (2), o lo que es lo mismo, se obtienen todas las ternas asociadas al termino **b=7**

γ=1

$$x = \frac{7^4 + 1^2}{2}$$

$$a = \frac{7^4 - 1^2}{2}$$

Terna (1201,1200,7)

γ=7

$$x = \frac{7^4 + 7^2}{14}$$

$$a = \frac{7^4 - 7^2}{14}$$

Terna (1225,1216,7)

Ej2. b=4 (par)

Los divisores de 4^4, son:

1,2,4,8,16,32,64,128,256

Se descartan los $\gamma^2 \geq b^4$ (16,32,64,128,256), y también aquellos donde un factor es impar en los siguientes en los productos:

~~(1)(256)~~

(2)(128)

(4)(64)

(8)(32)

Quedando por tanto:

γ=2

$$x = \frac{4^4 + 2^2}{4}$$

$$a = \frac{4^4 - 2^2}{4}$$

Terna (65,63,4)

γ=4

$$x = \frac{4^4 + 4^2}{8}$$

$$a = \frac{4^4 - 4^2}{8}$$

Terna (34,30,4)

De esta forma se obtienen todas las ternas **(x,a,4),** que cumplen la ecuación (2), o lo que es lo mismo, se obtienen todas las ternas asociadas al término **b= 4**

Como cualquier número entero positivo, **b** tiene uno o mas divisores de su misma paridad, por lo que siempre es posible encontrar ternas (x,a,b) que cumplan la ecuación

$$x^2 - a^2 = b^4 \quad (2)$$

Por tanto, cualquier número b, entero positivo, elevado a la cuarta potencia, puede expresarse como la diferencia de los cuadrados de dos números enteros positivos x,a

C).- ¿es posible encontrar ternas (x,a,b), de números enteros positivos, que cumplan la ecuación?

$$x^4 - a^4 = b^4$$

utilizando las expresiones:

$$x = \frac{b^4 + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$a = \frac{b^4 - \gamma^2}{2\gamma}$$

Si b es impar:

-se incluye como divisor el 1, y se descartan los valores donde $\boldsymbol{\gamma^2 \geq b^4}$

Si b es par:

-se descartan los valores donde $\boldsymbol{\gamma^2 \geq b^4}$

-si establecemos $\boldsymbol{b=\gamma\delta}$, donde $\boldsymbol{\gamma,\delta}$=enteros positivos, se descartaran los valores de $\boldsymbol{\gamma}$, donde en el producto $\boldsymbol{\gamma\delta}$, uno de los dos factores es impar

Elevando al cuadrado $\boldsymbol{x^{4/2}, a^{4/2}}$, se obtiene:

$$\left(\frac{b^4+\gamma^2}{2\gamma}\right)^2 - \left(\frac{b^4 - \gamma^2}{2\gamma}\right)^2 = b^4$$

$$x^4 = \left(\frac{b^4 + \gamma^2}{2\gamma}\right)^2$$

$$a^4 = \left(\frac{b^4 - \gamma^2}{2\gamma}\right)^2$$

En este caso, para demostrar el T. de Fermat (n=4), bastará con demostrar, que no pueden obtenerse pares de valores x,a, enteros positivos, para valores enteros de b, aplicando las expresiones:

$$b^8+\gamma^4+ 2\gamma^2b^4=4\gamma^2x^4$$

$$b^8+\gamma^4- 2\gamma^2b^4=4\gamma^2a^3$$

También se puede demostrar el teorema, partiendo de las expresiones:

$$x^{4/2} = \frac{b^4 + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$a^{4/2} = \frac{b^4 - \gamma^2}{2\gamma}$$

Operando

$2\gamma x^{4/2}=b^4+\gamma^2$

$2\gamma a^{4/2}=b^4 -\gamma^2$

Restando ambas expresiones

$2\gamma x^{4/2}-2\gamma a^{4/2}=2\gamma^2$

resulta:

$$x^2-a^2=\gamma$$

En la expresión anterior, el valor ***γ=1****, está asociado a todos los valores de* ***b*** *enteros positivos capaces de generar pares de valores* ***x,a****, que cumplan la ecuación (1), ya que el 1 es divisor de cualquier número entero* ***b****.**

De forma, que si no existieran valores enteros de ***x,a****, que cumplan*

$$x^2-a^2=1$$

se cumpliría el T. de Fermat para n=4

En este caso, demostrar el T. de Fermat, consiste en demostrar que no existen valores enteros positivos de **x,a** que cumplan la ecuación

$$x^2-a^2=1$$

La demostración es inmediata.

Cualquier par de valores x,a enteros positivos al elevarlos a una potencia mayor que 1, genera diferencias, mayores que la unidad. En nuestro caso si **x,a** fuesen enteros positivos se produciría que:

$$x^2-a^2>1^*$$

Por tanto, el cumplimiento de la ecuación

$$x^2 - a^2 = 1$$

exige que al menos **x,** ó **a**, no sean enteros

Quedando demostrado el T. de Fermat para n=4

A su vez la pareja de valores x,a, cuando **b** es entero, para el valor **γ=1,** exige el cumplimiento de:

$$x^2 = \frac{b^4 + 1}{2}$$

$$a^2 = \frac{b^4 - 1}{2}$$

expresiones, que para valores de **b** enteros, generan valores irracionales de x,a.**

*La diferencia más próxima a la unidad en la ecuacion $x^2 - a^2 = 1$ se produce cuando **x,a** son consecutivos y toman los menores valores posibles, y esta diferencia es siempre mayor que la unidad

**Las formulas

$$x^2 = \left(\frac{b^4 + 1}{2}\right)$$

$$a^2 = \left(\frac{b^4 - 1}{2}\right)$$

son expresiones generadoras de números irracionales x,a para valores de b enteros positivos. La máxima diferencia **x−a**, se produce cuando b=1, lo que implica a=0(solución trivial). Para valores mayores de b (2,3,4 ...), la diferencia **x−a<1,** lo que implica de nuevo que o bien **x**, o bien **a** no sean enteros(en este caso ambos son irracionales). Quedando demostrado igualmente el T. de Fermat

Procedimiento {IV}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^4 = a^4 + b^4 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos;

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x = r + p \qquad (2)$$

siendo **r, p**, números enteros positivos. **r>p**

Elevando al cuadrado

$$(r+p)^4 = r^4 + 4r^3p + 6r^2p^2 + 4pr^3 + p^4$$

operando

$$(r+p)^4 - r^4 = 4r^3p + 6r^2p^2 + 4p^3 r + p^4$$

Para la obtención de las ternas que cumpliesen la ecuación (1), tendremos, que encontrar que valores de **r,p** satisfacen

$$4r^3p + 6r^2p^2 + 4rp^3 + p^4 = c^4$$

$$c = \text{entero positivo}$$

Si no es posible encontrar dichos valores, se cumplirá el teorema de Fermat para n=4

Por tanto, la demostración de la veracidad del teorema de Fermat para n=4, supone demostrar que no existen pares de valores r,p, enteros positivos tales que en aplicación de la expresión anterior generen valores de c enteros, positivos

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el T. de Fermat para n=4

Procedimiento {V}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^4 - a^4 = b^4 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros.

Cualquier terna, que cumpla la ecuación (1) puede obtenerse resolviendo la ecuación:

$$(a+\alpha)^4 - a^4 = (a-\beta)^4; \quad (2)$$

con α, β números enteros ; $a>\beta$

Por tanto, la demostración de la veracidad del teorema de Fermat para n=4, supone demostrar que no existen pares de valores a,α,β enteros positivos tales que cumplan la ecuación (2)

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el T. de Fermat para n=4

RESUMEN CAPITULO III

Se han aplicado a la ecuación $x^4 - a^4 = b^4$, los procedimientos de formación de ternas pitagóricas primitivas

De su aplicación, en unos casos, se han obtenido algunas conclusiones que permiten afirmar el cumplimiento del T. de Fermat para la ecuación $x^4 - a^4 = b^4$, y en otros casos, simplemente se ha indicado un camino o una vía para demostrar el T. de Fermat, para el supuesto $n=4$

CAPITULO 4

APLICACIÓN DE LOS PROCEDIMIENTOS UTILIZADOS PARA LA OBTENCION DE TERNAS PITAGORICAS A LA ECUACION

$$x^n - a^n = b^n$$

¿ Es posible obtener ternas de números enteros positivos **x, a, b**, tales que cumplan la ecuación:

$$x^n - a^n = b^n \quad (1)$$

$$n = \text{número entero positivo; } n > 2$$

Aplicaremos los procedimientos expuestos para la obtención de ternas pitagóricas y obtendremos algunas conclusiones.

Procedimiento {I}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^n - a^n = b^n$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Si **r,p** son números enteros positivos con **r>p,** podemos expresar **b** como el producto de dos números enteros

$$b = rp$$

$$b^n = r^n p^n$$

Si factorizamos la ecuación (1)

$$(x^{n/2} + a^{n/2})\,(x^{n/2} - a^{n/2}) = b^n$$

En consecuencia se puede poner

$(x^{n/2} + a^{n/2}) = r^n$

$(x^{n/2} - a^{n/2}) = p^n$

Despejando $x^{n/2}$, $a^{n/2}$

$x^{n/2} = (r^n + p^n)/2$

$a^{n/2} = (r^n - p^n)/2$

elevando al cuadrado las expresiones anteriores, se obtiene

$$x^n=(r^n+p^n)^2/4$$

$$a^n=(r^n-p^n)^2/4$$

sustituyendo en la ecuación (1)

$$((r^n+p^n)^2/4)-((r^n-p^n)^2/4)= r^n p^n$$

Se obtiene la expresión

$$(r^n+p^n)^2-(r^n-p^n)^2=4\, r^n p^n$$

Si expresamos

$y^n= (r^n+p^n)^2$

$c^n=(r^n-p^n)^2$

$d^n=4r^n p^n$

y sustituimos, se obtiene

$$y^n-c^n=d^n \quad (2)$$

cuyas ternas (**y,c,d**), en función de **r,p** son

$$y=(r^n+p^n)^{2/n}$$

$$c=(r^n-p^n)^{2/n}$$

$$b=2^{2/n}\, rp$$

No se cumplirá el teorema de Fermat para cualquier número **n**>2, si existiesen parejas de números enteros positivos **r,p** tales que generasen valores de **y,c,d** enteros positivos.

Sin embargo, si nos fijamos en el término **d**

$$d=2^{2/n}\,rp$$

Es fácil comprobar que **d** *<u>no es entero</u>* para cualquier par de valores de **r,p** enteros positivos.

Por tanto, no se pueden obtener ternas (y,c,d) enteros positivos, que cumplan la ecuación

$$y^n-c^n=d^n \quad (1)$$

Quedando demostrado el T. de Fermat para cualquier valor de n>2

--

B).-A la misma conclusión se puede llegar si para obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^n-a^n=b^n \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

se divide ambos términos por **b**^{n} y se factoriza

$$\frac{x^n}{b^n}-\frac{a^n}{b^n}=1$$

$$\left(\frac{x^{n/2}}{b^{n/2}}+\frac{a^{n/2}}{b^{n/2}}\right)\left(\frac{x^{n/2}}{b^{n/2}}-\frac{a^{n/2}}{b^{n/2}}\right)=1$$

La igualdad anterior se mantiene si expresamos:

$$\left(\frac{x^{n/2}}{b^{n/2}}+\frac{a^{n/2}}{b^{n/2}}\right)=\frac{r^{n/2}}{p^{n/2}}$$

$$\left(\frac{x^{n/2}}{b^{n/2}}-\frac{a^{n/2}}{b^{n/2}}\right)=\frac{p^{n/2}}{r^{n/2}}$$

Donde **r,p** son números enteros positivos con **r>p**

Despejando

$$\frac{2x^{n/2}}{b^{n/2}}=\frac{r^n+p^n}{(r^{n/2})(p^{n/2})}$$

$$\frac{2a^{n/2}}{b^{n/2}}=\frac{r^n-p^n}{(r^{n/2})(p^{n/2})}$$

Pudiendo establecerse

$$x^{n/2}=r^n + p^n$$

$$a^{n/2}=r^n-p^n$$

$$b^{n/2}=2(r^{n/2})(p^{n/2})$$

Despejando queda

$$x=(r^n+p^n)^{2/n}$$

$$a=(r^n- p^n)^{2/n}$$

$$b=2^{2/n}rp$$

n=número entero positivo ; $n>2$

Si existieran pares de valores **r,p**, enteros positivos, que aplicados a las expresiones anteriores generaran valores de **x,a,b**, enteros positivos, el Teorema de Fermat no se cumpliría para cualquier valor de **n>2**

Sin embargo, con la expresión $b=2^{2/n}rp$, es inmediato comprobar que no es posible encontrar pares de valores r,p enteros positivos que generen valores de b enteros positivos, por tanto no existen ternas de valores enteros positivos (x,a,b), que cumplan la expresión

$$\mathbf{x^n-a^n=b^n \quad (1)}$$

Con lo que queda demostrado el T. de Fermat para cualquier valor de n>2

C).-Factorizando directamente la expresión

$$x^n - a^n = b^n \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

$$(x^{n/2} + a^{n/2})\,(x^{n/2} - a^{n/2}) = b^n$$

Si **r** y **p** son números enteros positivos, al objeto de obtener el termino **b,** entero positivo, para cualquier valor de **r,p**, podemos expresar:

$(x^{n/2} + a^{n/2}) = 2^{n/2} r^n$

$(x^{n/2} - a^{n/2}) = 2^{n/2} p^n$

Despejando x, a

$2x^{n/2} = 2^{n/2}\,(r^n + p^n)$

$2x^{n/2} = 2^{n/2}\,(r^n - p^n)$

Se obtiene

$x = 2^{2/n}(r^n + p^n)^{2/n}$

$a = 2^{2/n}(r^n - p^n)^{2/n}$

$b = 2rp$

En este caso, cualquier pareja de valores **r,p** genera valores enteros de **b**, pero estos mismos pares de valores no generan valores de **x,a** enteros positivos.

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat

Procedimiento {II}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^n - a^n = b^n \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x = r + p \qquad (2)$$

siendo **r,p,** números enteros positivos. **(r>p)**

Así mismo, todo número entero positivo puede expresarse como la diferencia de dos números enteros positivos, por lo que establecemos:

$$a = r - p \qquad (3)$$

con **r,p** números enteros positivos y **r>p**

Por tanto, todo par de números enteros positivos **x, a,** que cumpla la ecuación (1), pueden expresarse en función de **r, p,** aplicando (2) y (3).

Elevando al cubo las expresiones (2) y (3), y expresando el desarrollo del binomio de Newton separando los términos de orden impar, de los términos de orden par en (2) y en (3) resulta:

$$x^n = (r+p)^n = [\binom{n}{0} r^n + \binom{n}{2} r^{n-2} p^2 + \binom{n}{4} r^{n-4} p^4 + \binom{n}{6} r^{n-6} p^6 \ldots\ldots] +$$

$$+ [\binom{n}{1} r^{n-1} p + \binom{n}{3} r^{n-3} p^3 + \binom{n}{5} r^{n-5} p^5 + \ldots\ldots \binom{n}{n} p^n]$$

$$a^n = (r-p)^n = [\binom{n}{0} r^n + \binom{n}{2} r^{n-2} p^2 + \binom{n}{4} r^{n-4} p^4 + \binom{n}{6} r^{n-6} p^6 \ldots\ldots] -$$

$$- [\binom{n}{1} r^{n-1} p + \binom{n}{3} r^{n-3} p^3 + \binom{n}{5} r^{n-5} p^5 + \ldots\ldots \binom{n}{n} p^n]$$

Si llamamos C, a la suma de los términos de orden impar en el desarrollo del binomio de Newton de la expresión $(r+p)^n$

$$C = [\binom{n}{0} r^n + \binom{n}{2} r^{n-2} p^2 + \binom{n}{4} r^{n-4} p^4 + \binom{n}{6} r^{n-6} p^6 \ldots\ldots]$$

Si llamamos D, a la suma de los términos de orden par en el desarrollo del binomio de Newton de la expresión $(r+p)^n$

$$D= [\binom{n}{1} r^{n-1}\, p + \binom{n}{3} r^{n-3}\, p^3 + \binom{n}{5} r^{n-5}\, p^5 + \ldots\ldots]$$

Sustituyendo

$$x^n = C + D$$

$$a^n = C - D$$

Si multiplicamos las expresiones anteriores, se obtiene

$$C^2 - D^2 = x^n a^n$$

Si llamamos

$$E = xa;$$

Elevando a la potencia **n**, y sustituyendo

$$E^n = (r^2 - p^2)^n$$

Obteniéndose la expresión

$$C^2 - D^2 = E^n$$

Donde C ,D, E son enteros positivos ya que **r,p**, son enteros positivos.

Para que de la expresión anterior se pueda obtener todas las ternas de la ecuación (1), (ternas n=n), se tendrá que cumplir que:

$$C^2 = F^n$$

$$D^2 = G^n$$

Donde F, G, son números enteros positivos.

Sustituyendo

$$\mathbf{F^n - G^n = E^n \quad (I)\ ;}$$

Sustituyendo E por su valor en función de rp

$$\mathbf{F^n - G^n = (r^2 - p^2)^n \quad (i)\ ;}$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat, conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de las expresiones

$$F=[\binom{n}{0}r^{n} + \binom{n}{2}r^{n-2}\,p^{2} + \binom{n}{4}r^{n-4}\,p^{4} + \binom{n}{6}r^{n-6}\,p^{6}\ldots\ldots]^{2/n}$$

$$G=[\binom{n}{1}r^{n-1}\,p + \binom{n}{3}r^{n-3}\,p^{3} + \binom{n}{5}r^{n-5}\,p^{5} + \ldots\ldots]^{2/n}$$

generen valores de F, y G enteros positivos.

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat

Si restamos las expresiones

$$x^{n}=C+D$$

$$a^{n}=C-D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^{n}-a^{n}=2D\ \ (II)}$$

Sustituyendo x^n y a^n, por sus valores en función de r,p

$$\mathbf{(r+p)^{n}-(r-p)^{n}=2D\ (ii)}$$

Para que de la expresión anterior se pueda obtener todas las ternas de la ecuación (1), (ternas n=n), se tendrá que cumplir que:

$$2D=\ b^{n}\qquad (b=\text{entero positivo})$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p**, que en aplicación de la expresión

$$2[\binom{n}{1}r^{n-1}\,p + \binom{n}{3}r^{n-3}\,p^{3} + \binom{n}{5}r^{n-5}\,p^{5} + \ldots\ldots]=b^{n}$$

generen valores enteros de **b**

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat

Si <u>sumamos</u> las expresiones

$$x^n = C + D$$

$$a^n = C - D$$

se obtiene

$$\mathbf{x^n + a^n = 2C \ (III)}$$

Sustituyendo $\mathbf{x^n}$ $\mathbf{a^n}$, por sus valores en función de **r,p**

$$\mathbf{(r+p)^n + (r-p)^n = 2C \ (iii)}$$

Para que de la expresión anterior se pueda obtener todas las ternas de la ecuación (1), (ternas n=n), se tendrá que cumplir:

$$2C = c^n \quad (c = \text{número entero positivo})$$

$$2[\binom{n}{0} r^n + \binom{n}{2} r^{n-2} p^2 + \binom{n}{4} r^{n-4} p^4 + \binom{n}{6} r^{n-6} p^6 \ldots\ldots] = c^n$$

En este caso el cumplimiento del teorema de Fermat conduce a demostrar que no existen parejas de valores **r,p,** que en aplicación de la expresión

$$2[\binom{n}{0} r^n + \binom{n}{2} r^{n-2} p^2 + \binom{n}{4} r^{n-4} p^4 + \binom{n}{6} r^{n-6} p^6 \ldots\ldots] \ = c^n$$

generen valores enteros de **c**

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat

Análisis conjunto de las ecuaciones obtenidas.

Ecuación (I)

$$\mathbf{F^n - G^n = (r^2 - p^2)^n \quad (I)}$$

-para que de la ecuación (I) puedan extraerse todas las ternas que satisfazgan la ecuación(1), se ha de cumplir

$F=(C)^{2/n}$; F número entero positivo

$G=(D)^{2/n}$;G número enteros positivo

Ecuación (II)

$$\mathbf{(r+p)^n - (r-p)^n = 2D \quad (II)}$$

-para que de la ecuación (II) puedan extraerse todas las ternas que satisfazgan la ecuación (1), se ha de cumplir

$2D=b^n$, b= entero positivo

Ecuación (III)

$$\mathbf{(r+p)^n + (r-p)^n = 2C \quad (III)}$$

- para que de la ecuación (III) puedan extraerse todas las ternas que cumplan la ecuación (1), se ha de cumplir

$2C=c^n$; c= entero positivo

Ecuaciones (I) y (II)

De la comparación de ambas ecuaciones, se desprende

-respecto de la ecuación (I), como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), se exige que F y G=números enteros positivos, con

$$F=(C)^{2/n}$$

$$G=(D)^{2/n}$$

-respecto de la ecuación (II), como generadora de ternas que cumplen la ecuación (I), se exige que D=número entero positivo **b**, elevado a la potencia **n** y dividido por 2

$$D=b^n/2$$

Supongamos que es posible encontrar parejas de valores **r,p** tales que generen valores enteros de F y G. Es decir, supongamos que dichos pares de valores **r,p** cumplen la ecuación

$$\mathbf{F^n - G^n = (r^2 - p^2)^n \quad (I)}$$

Si G es entero

$$D=(G)^{n/2}$$

De otra parte, la ecuación

$$\mathbf{(r+p)^n - (r-p)^n = 2D = b^n \quad (II)}$$

como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), exige que:

$$D=b^n/2;$$

Si igualamos el término D en ambas ecuaciones

$$(G)^{n/2}= b^n/2$$

despejando **b**

$$b=2^{1/n}G^{1/2}$$

donde para valores de G enteros no se obtiene ningún valor de **b** entero para valores de n>2. Es decir, la ecuación (II) no genera ternas que cumplen la ecuación (I) para valores de G enteros

Supongamos ahora que es posible encontrar valores **r,p** tales que generen valores enteros de **b**, es decir dichos pares de valores cumplen la ecuación

$$(r+p)^n - (r - p)^n = 2D \quad (II)$$

Si **b** es entero,

$$D = b^n/2$$

De otra parte, la ecuación

$$F^n - G^n = (r^2 - p^2)^n \quad (I)$$

como generadora de ternas que cumplen la ecuación (1), exige que:

$$D = (G)^{n/2}$$

Si igualamos el término D en ambas expresiones

$$(G)^{n/2} = b^n/2$$

despejando G

$$G = b^2/2^{2/n}$$

donde para valores de **b** enteros no se obtiene ningún valor de G entero para valores de n>2. Es decir la ecuación (I) no genera ternas que cumplen la ecuación (1) para valores de **b** enteros.

Por tanto, la solución que hace compatible las dos posibilidades anteriores es que no es factible encontrar pares de valores r,p enteros que generen valores de G y b enteros, con lo que se cumpliría el T. de Fermat.

Ecuaciones (I) y (III)

De la misma forma siguiendo el razonamiento anteriormente expuesto, de la comparación de las ecuaciones (I) y (III), se obtiene la relación

$$(F)^{n/2} = c^n/2$$

despejando **c**

$$c = 2^{1/n} F^{1/2}$$

donde para valores de F enteros no se obtiene ningún valor de **c** entero para valores de n>2. Es decir, la ecuación (III) no genera ternas para valores de **c** enteros

despejando F

$$F = c^2/2^{2/n}$$

donde para valores de **c** enteros no se obtiene ningún valor de F entero para valores de n>2. Es decir la ecuación (I) no genera ternas para valores de **F** enteros

Por tanto, la solución que hace compatible las dos posibilidades anteriores es que no es factible encontrar pares de valores r,p enteros que generen valores de F y c enteros, con lo que se cumpliría el T. de Fermat.

Como resumen, las ecuaciones

$$F^n - G^n = (r^2 - p^2)^n \quad (I)$$

$$(r+p)^n - (r-p)^n = 2D = b^n \quad (II)$$

$$(r+p)^n + (r-p)^n = 2C = c^n \quad (III)$$

no generan ternas de números enteros que cumplen la ecuación

$$x^n - a^n = b^n \quad (1)$$

$$n > 2$$

es decir no existen pares de números enteros positivos **r,p** que generen valores enteros de **F,G,b,c,** con lo que no existen ternas **x,a,b** enteros positivos que cumplan la ecuación (1)

Procedimiento {III}

A).-Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^n-a^n=b^n \quad (1)$$

$$n>2$$

con **x, a, b,** números enteros.

Si **m**, es un número entero positivo, al igual que con las ternas pitagóricas, sería posible asociar a dicho número **m**, las ternas **(x,a,b)** que se corresponderían con las siguientes expresiones:

$[m^n+i^n,\ m^n-i^n,\ 2[\binom{n}{1}m^{n(n-1)}\ \ i^n+\binom{n}{3}m^{n(n-3)}\ i^{3n}+\binom{n}{5}m^{n(n-5)}\ i^{5n}....]^{1/n}$

Donde:

Si n=par, i, toma valores 1,3,5,7,...............n−1

Si n=impar, i, toma valores 2,4,6,8,...........n−1

Si se establece

$x=(m^n+i^n)$

$a=(m^n-i^n)$

$b=2[\binom{n}{1}m^{n(n-1)}\cdot i^n+\binom{n}{3}m^{n(n-3)}\cdot i^{3n}+\binom{n}{5}m^{n(n-5)}\cdot i^{5n}....]^{1/n}$

y se sustituye en la ecuación (1)

$(m^n+i^n)^n-(m^n-i^n)^n=2[\binom{n}{1}m^{n(n-1)}\cdot i^n+\binom{n}{3}m^{n(n-3)}\ i^{3n}+\binom{n}{5}m^{n(n-5)}\ i^{5n}.]$

En este procedimiento se han dispuesto las incógnitas **m, i** de forma que asociarían las ternas primitivas a números m enteros positivos.

Sin embargo no existen pares de valores **m,i**, que generen valores de **b** enteros positivos

$$b=2[\binom{n}{1}m^{n(n-1)}\cdot i^n+\binom{n}{3}m^{n(n-3)}\cdot i^{3n}+\binom{n}{5}m^{n(n-5)}\cdot i^{5n}....]^{1/n}$$

Para ello se requiere que el término

$2[\binom{n}{1}m^{n(n-1)} \cdot i^{n} + \binom{n}{3}m^{n(n-3)} \cdot i^{3n} + \binom{n}{5}m^{n(n-5)} \cdot i^{5n} \ldots]$

sea un numero entero **b**, elevado a la n-ésima potencia

$2[\binom{n}{1}m^{n(n-1)} \cdot i^{n} + \binom{n}{3}m^{n(n-3)} \cdot i^{3n} + \binom{n}{5}m^{n(n-5)} \cdot i^{5n} \ldots] = b^{n}$

En este caso, demostrar el teorema de Fermat, supone demostrar que no es posible encontrar parejas de valores **m,i** que en aplicación de la expresión anterior generen valores de **b**, enteros para cualquier n>2.

Constituyendo lo anteriormente expuesto un camino para demostrar el Teorema de Fermat

B).-En concordancia con lo anterior, se tratará de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^2 - a^2 = b^n \quad (2)$$

$$n > 2$$

con **x, a, b,** números enteros positivos, asociando dichas ternas al termino **b.**

Para ello factorizamos la ecuación (1)

$$(x + a)\,(x - a) = b^n$$

podemos expresar:

$$(x + a) = (b^n)/\gamma$$

$$(x - a) = \gamma$$

donde **γ**=todos los divisores de $\mathbf{b^n}$, que generan valores enteros positivos de **x,a.**

Despejando x, a, se obtiene:

$$x = \frac{b^n + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$a = \frac{b^n - \gamma^2}{2\gamma}$$

Pudiendo asociar al término **b**, todas las ternas posibles, donde, en función de la paridad de **b**, se establecen las siguientes condiciones:

Si b es impar:

-se incluye como divisor el 1, y se descartan los valores donde $\gamma^2 \geq b^n$

Si b es par:

-se descartan los valores donde $\gamma^2 \geq b^n$

-si establecemos $b=\gamma\delta$, donde γ,δ=enteros positivos, se descartaran los valores de γ, donde en el producto $\gamma\delta$, uno de los dos factores es impar

De esta forma se obtienen todas las ternas **(x,a,b),** que cumplen la ecuación (2), o lo que es lo mismo, se obtienen todas las ternas asociadas al término **b**

Como cualquier número entero positivo **b**, tiene uno o más divisores de su misma paridad, siempre es posible encontrar ternas (x,a,b) que cumplan la ecuación

$$x^2 - a^2 = b^n \quad (2)$$

Por tanto, cualquier número b, entero positivo, elevado a la enésima potencia, puede expresarse como la diferencia de los cuadrados de dos números enteros positivos x,a

C) ¿es posible encontrar ternas (x,a,b), de números enteros positivos, que cumplan la ecuación?

$$x^n - a^n = b^n \quad (1)$$

$$n>2$$

utilizando las expresiones:

$$x^{n/2} = \frac{b^n + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$x^{n/2} = \frac{b^n - \gamma^2}{2\gamma}$$

Si b es impar:

-se incluye como divisor el 1, y se descartan los valores donde $\boldsymbol{\gamma^2 \geq b^n}$

Si b es par:

-se descartan los valores donde $\boldsymbol{\gamma^2 \geq b^n}$

-si establecemos $\boldsymbol{b=\gamma\delta}$, donde $\boldsymbol{\gamma,\delta}$=enteros positivos, se descartaran los valores de $\boldsymbol{\gamma}$, donde en el producto $\boldsymbol{\gamma\delta}$, uno de los dos factores es impar

Elevando al cuadrado $\boldsymbol{x^{n/2}, a^{n/2}}$, se obtiene:

$$\left(\frac{b^n+\gamma^2}{2\gamma}\right)^2 - \left(\frac{b^n-\gamma^2}{2\gamma}\right)^2 = b^n$$

$$x^n = \left(\frac{b^n+\gamma^2}{2\gamma}\right)^2$$

$$a^n = \left(\frac{b^n-\gamma^2}{2\gamma}\right)^2$$

En este caso, para demostrar el T. de Fermat (n=n), bastará con demostrar, que no pueden obtenerse pares de valores x,a, enteros positivos, para valores enteros de b, aplicando las siguientes expresiones:

$$b^{2n}+\gamma^4+2\gamma^2 b^n=4\gamma^2 x^n$$

$$b^{2n}+\gamma^4-2\gamma^2 b^n=4\gamma^2 a^n$$

Constituyendo lo anterior un camino para demostrar el T. de Fermat

También se puede demostrar el teorema, partiendo de las expresiones:

$$x^{n/2} = \frac{b^n + \gamma^2}{2\gamma}$$

$$a^{n/2} = \frac{b^n - \gamma^2}{2\gamma}$$

$$n>2$$

Operando

$2\gamma x^{n/2}=b^n+\gamma^2$

$2\gamma a^{n/2}=b^n -\gamma^2$

Restando ambas expresiones

$2\gamma x^{n/2}-2\gamma a^{n/2}=2\gamma^2$

resulta:

$$x^{n/2}-a^{n/2}=\gamma$$

En la expresión anterior, el valor ***γ=1****, está asociado a todos los valores de* ***b*** *enteros positivos capaces de generar pares de valores* ***x,a****, que cumplan la ecuación (1), ya que el 1 es divisor de cualquier número entero* ***b****.*

De forma, que si no existieran valores enteros de ***x,a****, que cumplan*

$$x^{n/2}-a^{n/2}=1$$

se cumpliría el T. de Fermat para n=n

En este caso, demostrar el T. de Fermat, consiste en demostrar que no existen valores enteros positivos de **x,a** que cumplan la ecuación

$$x^{n/2}-a^{n/2}=1*$$

La demostración es inmediata.

Cualquier par de valores x,a enteros positivos al elevarlos a una potencia mayor que 1, genera diferencias, mayores que la unidad. En nuestro caso si **x,a** fuesen enteros positivos se produciría que:

$$x^{n/2}-a^{n/2}>1$$

Por tanto, el cumplimiento de la ecuación

$$x^{n/2} - a^{n/2} = 1$$

exige que al menos **x,** ó **a** ó ambos, no sean enteros

Quedando demostrado el T. de Fermat para cualquier valor de n>2

A su vez la pareja de valores x,a, cuando **b** es entero, para el valor **γ=1,** exige el cumplimiento de:

$$x^{n/2} = \frac{b^n + 1}{2}$$

$$a^{n/2} = \frac{b^n - 1}{2}$$

expresiones, que para valores de **b** enteros, generan valores irracionales de x,a.**

*La diferencia más próxima a la unidad en la ecuación $x^{n/2} - a^{n/2} = 1$**,**se produce cuando **x,a** son consecutivos y toman los menores valores posibles, y esta diferencia siempre es mayor que 1, para cualquier n>2

**Las formulas

$$x^{n/2} = \left(\frac{b^n + 1}{2}\right)$$

$$a^{n/2} = \left(\frac{b^n - 1}{2}\right)$$

son expresiones generadoras de números irracionales x,a para valores de b enteros positivos, para cualquier n>2 La máxima diferencia **x−a**, se produce cuando b=1, lo que implica a=0(solución trivial). Para valores mayores de b (2,3,4 ...), la diferencia **x−a<1,** lo que implica de nuevo que o bien **x**, o bien **a** o ambos, no sean enteros(en este caso ambos son irracionales). Quedando demostrado igualmente el T. de Fermat para cualquier n>2

Procedimiento {IV}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^n = a^n + b^n \quad (1)$$

$$n>2$$

con **x, a, b,** números enteros positivos; x>a

Dado que todo número entero positivo puede expresarse como la suma de dos números enteros positivos, establecemos:

$$x=r+p \qquad (2)$$

siendo **r, p**, números enteros positivos. r>p

Elevando a la potencia n

$$x^n=(r+p)^n=[\binom{n}{0}r^n+\binom{n}{1}r^{n-1}\,p+\binom{n}{2}r^{n-2}\,p^2+\binom{n}{n}p^n$$

operando

$$(r+p)^n - r^n =[\ \binom{n}{1}r^{n-1}\,p+\binom{n}{2}r^{n-2}\,p^2+\ldots\ldots\ldots\binom{n}{n}p^n]$$

Para la obtención de las ternas que cumpliesen la ecuación (1), tendremos, que encontrar que valores de r,p satisfacen

$$[\ \binom{n}{1}r^{n-1}\,p+\binom{n}{2}r^{n-2}\,p^2+\ldots\ldots\ldots\binom{n}{n}p^n] \ =c^n$$

$$c=\text{entero positivo}$$

Si no es posible encontrar dichos valores, se cumplirá el teorema de Fermat.

Por tanto, la demostración de la veracidad del teorema de Fermat, supone demostrar que no existen pares de valores r,p, enteros positivos tales que en aplicación de la expresión anterior generen valores de c enteros, positivos

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el T. de Fermat

Procedimiento {V}

Se trata de obtener ternas de valores **x, a, b**, tales que cumplan la expresión:

$$x^n - a^n = b^n \quad (1)$$

$$n > 2$$

con **x, a, b,** números enteros.

Cualquier terna, que cumpla la ecuación (1) puede obtenerse resolviendo la ecuación:

$$(a+\alpha)^n - a^n = (a-\beta)^n; \quad (2)$$

con α, β números enteros ; $a>\beta$

Por tanto, la demostración de la veracidad del teorema de Fermat, supone demostrar que no existen pares de valores a,α,β enteros positivos tales que cumplan la ecuación (2)

Constituyendo lo anteriormente expuesto, un camino para demostrar el T. de Fermat

RESUMEN CAPITULO IV

Se han aplicado a la ecuación $x^n - a^n = b^n$, los procedimientos de formación de ternas pitagóricas primitivas

De su aplicación, en unos casos, se han obtenido algunas conclusiones que permiten afirmar el cumplimiento del T. de Fermat. y en otros casos, simplemente se ha indicado un camino o una vía para demostrar dicho teorema.

CAPITULO 5

PROPIEDADES DE LAS TERNAS PITAGORICAS

5.1 PROPIEDAD P1

Las ternas primitivas de números enteros positivos(x,a,b), que cumplen la ecuación

$$x^2-a^2=b^2 \quad (1);$$

exigen en términos de paridad la siguiente combinación:

x=impar; a=impar; b=par

En efecto, factorizando la expresión

$$x^2-a^2=b^2 \quad (1)$$

con **x, a, b,** números enteros positivos

$$(x+a)\,(x-a)=b^2$$

Si **r** y **p** son números enteros positivos, con **r>p**, podemos expresar

$$(x+a)=2r^2$$

$$(x-a)=2p^2$$

Despejando los términos **x, a**, se obtienen los valores de las ternas (**x,a,b**), que cumplen la ecuación (1) en función de **r,p.**

$$2x=2r^2+2p^2$$

$$2a=2r^2-2p^2$$

$$\mathbf{x=r^2+p^2}$$

$$\mathbf{a=r^2-p^2}$$

$$\mathbf{b=2rp}$$

Dando valores enteros positivos a **r,p** con **r>p**, se obtienen todas las ternas pitagóricas

En función de la paridad de **r,p** se dan las siguientes combinaciones.

a)La pareja de valores **r,p** tienen la misma paridad

r=par; p=par

r=impar; p=impar

En estos supuestos la paridad de **x,a,b** es:

x=par; a=par; b=par

Las ternas obtenidas no son primitivas

b)La pareja de valores **r,p** tienen paridad contraria

r=par; p=impar

r=impar; p=par

En estos supuestos la paridad de **x,a,b** es:

x=impar; a=impar; b=par

Las ternas obtenidas son primitivas si el único divisor común a **r,p** es la unidad.

Por tanto, se puede afirmar que:

Las ternas pitagóricas primitivas (x,a,b), que cumplen la ecuación

$$x^2-a^2=b^2 \quad (1)$$

exigen en términos de paridad la siguiente combinación:

x=impar; a=impar; b=par

Si existieran ternas **x,a,b** que cumplieran la ecuación:

$$x^n-a^n=b^n$$

también gozarían de la propiedad P1

Notas:

- el término b=2rp, es siempre par, para cualquier par de valores r,p

-los términos x,a tienen la misma paridad para cualquier par de valores r,p

- Las ternas pitagóricas de números enteros positivos (x,a,b), son primitivas si el único divisor común de x, a, b, es la unidad.

5.2 PROPIEDAD P2

Si la terna primitiva de números enteros positivos (**x,a,b**),cumple la ecuación:

$$x^2 - a^2 = b^2 \quad (1)$$

y establecemos la ecuación (2), donde **c²**= número entero positivo

$$c^2 = x^2 + a^2 \quad (2)$$

el término **c**, de la ecuación (2) **no** es entero para cualquier par de valores **a,x** que cumplen la ecuación (1)

Ej. Si en la terna (5,3,4), donde **x**=5, **a**=3, calculamos **c**, aplicando la ecuación anterior, comprobamos que c no es entero.

$$c=(25+9)^{1/2}=5.8009$$

Si partimos de las ecuaciones (1) y (2)

$$x^2 - a^2 = b^2 \quad (1)$$

$$c^2 - a^2 = x^2 \quad (2)$$

con **x,a,b** enteros positivos, demostraremos que **c** no no es entero positivo

Despejando **a²** en ambas ecuaciones

$$a^2 = x^2 - b^2$$

$$a^2 = c^2 + x^2$$

Igualando

$$x^2 - b^2 = c^2 - x^2$$

$$c^2 = 2x^2 - b^2$$

Si **x** y **b** cumplen la ecuación (1) se pueden expresar de la siguiente forma

$x=r^2+p^2$

$b=2rp$

donde **r,p** son enteros positivos.

Sustituyendo.

$$c^2=2(r^2+p^2)^2-(2rp)^2=2r^4+2p^4$$

$$c^2=2r^4+2p^4$$

Expresando la ecuación (2), en función de *r,p*

$$2r^4+2p^4-(r^2-p^2)^2=(r^2-p^2)^2$$

Cuyas ternas (**c,a,x**), en función de **r,p** son:

$$[(2r^4+2p^4)^{1/2},\ (r^2-p^2),\ (r^2+p^2)]$$

Atendiendo a la propiedad, de las ternas pitagóricas primitivas (P1)

"Las ternas primitivas de números enteros positivos(x,a,b), que cumplen la ecuación

$$x^2-a^2=b^2 \ (1);$$

exigen en términos de paridad la siguiente combinación:

x=impar; a=impar; b=par"

Como las ternas **c,a,x** no cumplen en términos de paridad la propiedad anterior, ya que:

-c=siempre par para cualquier valor de **r,p.**

-x=impar (por condición de paridad de ternas primitivas)

a=impar(por condición de paridad de ternas primitivas)

Llegamos a la conclusión de que la terna **c,a,x** no puede ser una terna primitiva de la ecuación

$$c^2-a^2=x^2 \ (2)$$

5.3 PROPIEDAD P3

Ternas Equidistantes.-

Si x,a,b, son números enteros positivos que cumplen la ecuación

$$x^2 - a^2 = b^2$$

denominaremos Ternas Equidistantes, cuando la diferencia entre los términos:

$$x - a = \alpha$$

$$a - b = \alpha$$

α=número entero positivo.

Sustituyendo, la ecuación (1), se transforma

$$(a+\alpha)^2 - a^2 = (a-\alpha)^2$$

Cuyas soluciones son

$a=0$ (trivial)

<u>$a=4\alpha$</u>

Dando valores a α, se obtienen todas las ternas equidistantes de **a**

$\alpha=1$; $a=4$; **Terna (5,4,3)**

$\alpha=2$; $a=8$; Terna (10,8,6)

$\alpha=3$; $a=12$; Terna (15,12,9)

Puesto que la separación de los términos extremos de la terna **x,b**, respecto del termino central **a**, es **α**, solo hay una única terna pitagórica primitiva equidistante

$$(x,a,b) = (5,4,3)$$

donde la diferencia entre los términos que la forman es la unidad

El resto de ternas equidistantes no son primitivas.