EL NUMERO PI

El número pi lo podemos expresar como el límite del término general de una sucesión $\{a_n\}$ con la siguiente relación de recurrencia:

El valor del primer término es:

$a_1=((2-(2)^{1/2})^{1/2})\cdot 2^2$

y el termino a_n se obtiene en función del término anterior (a_{n-1}) realizando las siguientes operaciones:

-Dividiendo por 2^{n+1} el término a_{n-1} y elevando al cuadrado el resultado

$$(a_{n-1}/2^{n+1})^2$$

-Calculando la raíz cuadrada al resultado de restar de 4, el valor anterior

$$(4-(a_{n-1}/2^{n+1})^2)^{1/2}$$

-Calculando la raíz cuadrada al resultado de restar de 2, el valor anterior

$$(2-(4-(a_{n-1}/2^{n+1})^2)^{1/2})^{1/2}$$

-Multiplicando el valor anterior por 2^{n+1}

$$a_n=[(2-(4-(a_{n-1}/2^{n+1})^2)^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^{n+1}$$

Así para:

n=1

$a_1=[(2-(2)^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^2$

n=2

$a_2=[(2-(4-(a_1/2^2)^2)^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^3$

$(a_1/2^3)^2=(2-(2)^{1/2})$

$(4-(2-(2)^{1/2}))^{1/2}=(2+(2)^{1/2})^{1/2}$

$a_2=[(2-(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^3$

n=3

$a_3=[(2-(4-(a_2/2^3)^2)^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^4$

$(a_2/2^3)^2= 2-(2+(2)^{1/2})^{1/2}$

$4-(2-(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2}=2+(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2}$

$a_3=[(2-(2+(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^4$

……………………………………

n=n

$a_n=[(2-(4-(a_{n-1}/2^{n+1})^2)^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^{n+1}$

De tal forma que **π** lo podemos expresar como el límite de a_n cuando n tiende a infinito

$$\pi = \lim_{n\to\infty} an \qquad (1)$$

Si calculamos los valores para los primeros términos de la sucesión, se puede comprobar como se aproximan los decimales de **π**

Los términos de la sucesión $\{a_n\}$ son:

$a_1=[(2-(2)^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^2 =3.061467459$

$a_2=[(2-(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^3=3.121445152$

$a_3=[(2-(2+(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^4=3.136548491$

$a_4=[(2-(2+(2+(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^5=3.140331157$

$a_5=[(2-(2+(2+(2+(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^6=3.141277251$

$a_6=[(2-(2+(2+(2+(2+(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^7=3.141513801$

…………………………………………………………………………

$a_9=[(2-(2+(2+(2+(2+(2+(2+(2+(2)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^{10}=3.141591422$

…………………………………………………………………………

$a_{14}=3.141592654807589$*

…………………………………………………………………………

Conforme aumenta n, se va agotando la capacidad de cálculo de la simple calculadora o del ordenador personal por lo que se necesitaría un equipo mas potente para aproximar un número mayor de cifras decimales de pi

La expresión (1), se deduce de aproximar la suma de la longitud de los lados de un polígono con un número muy grande de lados (∞), a la longitud de la circunferencia circunscrita, partiendo inicialmente de un octógono inscrito en la circunferencia y duplicando en cada iteración el número de lados.

Así, cada termino de la sucesión $\{a_n\}$, se corresponde con los valores siguientes:

$a_1=[\sin(pi/(2^3)]\cdot 2^3$

$a_2=\sin(pi/2^4)\cdot 2^4$

$a_3=\sin(pi/2^5)\cdot 2^5$

………………..

$a_n=\sin(pi/2^{n+2})\cdot 2^{n+2}$

$$\pi = \lim_{n\to\infty} [(\sin(pi/(2^{n+2})) \bullet 2^{n+2}] \qquad (2)$$

La indeterminación ($0\bullet\infty$), se resuelve aplicando la regla de L´Hopital.

Si partiésemos de un dodecágono regular, inscrito en una circunferencia, duplicando el numero de lados en cada iteración, hasta conseguir un número muy grande de lados (∞), se obtendría igualmente el número pi, a partir del límite del T.G de la sucesión $\{b_n\}$:

El valor del primer término es:

$b_1=[(2-(3)^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^1\cdot 3$

y el termino b_n se obtiene en función del término anterior (b_{n-1}) realizando las siguientes operaciones:

-Dividiendo por 2^n el término b_{n-1} y elevando al cuadrado el resultado

$$(b_{n-1}/(3\cdot 2^n))^2$$

-Calculando la raíz cuadrada al resultado de restar de 4, el valor anterior

$$(4-(b_{n-1}/(3\cdot 2^n))^2)^{1/2}$$

-Calculando la raíz cuadrada al resultado de restar de 2, el valor anterior

$$(2-(4-(b_{n-1}/(3\cdot 2^n))^2)^{1/2})^{1/2}$$

-Multiplicando el valor anterior por 2^n

$$b_n=[(2-(4-(b_{n-1}/(3\cdot 2^n))^2)^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^n.3$$

n=1

$b_1=(2-(3)^{1/2})^{1/2})\bullet 2^1\cdot 3$

n=2

$b_2=[(2-(2+(3)^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^2\cdot 3$

n=3

$b_3=[(2-(2+(2+(3)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^3\cdot 3$

……………………………………

n=n

$b_n=[(2-(2+(2+(2+(2+\ldots\ldots\ldots\ldots(3)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^n\cdot 3$

De tal forma que **π** lo podemos expresar como el límite de b_n cuando n tiende a infinito*

$$\pi = \lim_{n\to\infty} bn \qquad (3)$$

Calculando los valores de los términos de la sucesión,

$b_1=[(2-(3)^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^1\cdot 3=3.105828541$

$b_2=[(2-(2+(3)^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\bullet 2^2\cdot 3=3.132628613$

$b_3=[(2-(2+(2+(3)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^3\cdot 3=3.139350203$

………………………………………………………..

$b_6=[(2-(2+(2+(2+(2+(2+(3)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^6\cdot 3=3.14155760$8

………………………………………………………..

$b_9=[(2-(2+(2+(2+(2+(2+(2+(2+(2+(3)^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2})^{1/2}]\cdot 2^9\cdot 3=3.141592106$*

Se comprueba igualmente que conforme se aumenta n, se obtienen mas decimales de pi.

Así, cada término de la sucesión $\{b_n\}$, se corresponde con los valores siguientes:

$b_1=[\sin(pi/(3\cdot 2^2)]\ 3\cdot 2^2$

$b_2=[\sin(pi/(3\cdot 2^3)]\ 3\cdot 2^3$

$b_3=[\sin(pi/(3\cdot 2^4)]\ 3\cdot 2^4$

………………..

$b_n=[\sin(pi/(3\cdot 2^{n+1})]\ 3\cdot 2^{n+1}$

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} [(\sin(pi/(3 \cdot 2^{n+1})) \cdot 3 \cdot 2^{n+1}] \qquad (4)$$

La indeterminación ($0 \cdot \infty$), se resuelve aplicando la regla de L´Hopital.

*En amarillo las cifras decimales aproximadas a pi

CONCLUSION

Mediante las expresiones (1) y (3) es posible establecer el número pi en función de los irracionales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$

Miguel Arias Fernandez

Alicante 26 de octubre 2020